JCGM 100:2008

GUM 1995 wersja poprawiona

Ewaluacja danych pomiarowych

Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru

Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

Pierwsze wydanie 2008

© JCGM 2008

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Dokument opracowany przez Grupę Roboczą 1 Wspólnego Komitetu ds. Przewodników w Metrologii (JCGM /WG 1).

Prawa autorskie do tego dokumentu są udostępniane wspólnie przez organizacje członkowskie JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP i OIML).

Prawa autorskie

Nawet jeśli elektroniczna wersja GUM z 2008 r. jest dostępna bezpłatnie na stronie internetowej BIPM (www.bipm.org), prawa autorskie do tego dokumentu przysługują wspólnie organizacjom członkowskim JCGM, a wszystkie pojawiające się przy tym logo i emblematy są również tym prawem objęte i podlegają ochronie na poziomie międzynarodowym. Strony trzecie nie mogą niniejszego wydania GUM przepisywać ani zmieniać znaków firmowych, ani też wydawać lub sprzedawać jego kopii, upowszechniać lub wykorzystywać tej wersji GUM w Internecie. W celu komercyjnego wykorzystania, reprodukowania lub przekazywania tego dokumentu i/lub logo, emblematów, publikacji lub innych zawartych w nim wytworów należy uzyskać uprzednią pisemną zgodę dyrektora BIPM.

Wrzesień 2008

JCGM 100:2008

GUM 1995 z niewielkimi poprawkami

Ewaluacja danych pomiarowych — Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru

Wydanie pierwsze 2008

Wersja poprawiona 2010

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Prawa autorskie do niniejszego przewodnika JCGM przysługują wspólnie organizacjom członkowskim JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP i OIML).

Prawa autorskie

Nawet jeśli wersje elektroniczne są dostępne bezpłatnie na stronie internetowej jednej lub kilku organizacji członkowskich JCGM, majątkowe i osobiste prawa autorskie związane ze wszystkimi publikacjami JCGM są chronione na poziomie międzynarodowym. JCGM nie zezwala stronom trzecim na przepisywanie lub zmianę znaku firmowego, sprzedaż kopii do publicznej wiadomości, a także na rozpowszechnianie lub korzystanie z jego publikacji w Internecie. JCGM sprzeciwia się również zniekształcaniu, powiększaniu lub okrajaniu publikacji, w tym tytułów, haseł i logo, zarówno jego jak i organizacji członkowskich.

Oficjalne wersje i tłumaczenia

Jedynymi oficjalnymi wersjami dokumentów są te, które opublikował JCGM w ich oryginalnych językach.

Publikacje JCGM mogą być tłumaczone na języki inne niż te, w których dokumenty zostały pierwotnie opublikowane przez JCGM. Przed wykonaniem tłumaczenia należy uzyskać zgodę JCGM. Wszystkie tłumaczenia powinny być zgodne z oryginalnym i oficjalnym formatem wzorów i jednostek (bez konwersji na inne wzory lub jednostki) i zawierać następujące oświadczenie (do przetłumaczenia na wybrany język):

> Wszystkie produkty JCGM są chronione prawem autorskim na poziomie międzynarodowym. Niniejsze tłumaczenie oryginalnego dokumentu JCGM zostało sporządzone za zgodą JCGM. JCGM zachowuje na poziomie międzynarodowym pełne prawa autorskie do projektu i treści tego dokumentu oraz do tytułów, hasła i logo JCGM. Organizacjom członkowskim JCGM przysługuje również na poziomie międzynarodowym ochrona ich tytułów, haseł i logo zawartych w publikacjach JCGM. Jedyną oficjalną wersją jest dokument opublikowany przez JCGM w oryginalnych językach.

JCGM nie ponosi żadnej odpowiedzialności za trafność, dokładność, kompletność lub jakość informacji i materiałów oferowanych w jakimkolwiek tłumaczeniu. Kopię tłumaczenia należy przekazać JCGM w momencie publikacji.

Reprodukowanie

Publikacje JCGM mogą być reprodukowane pod warunkiem, że JCGM udzieli na to pisemnej zgody. Próbkę każdego reprodukowanego dokumentu należy przekazać JCGM w momencie reprodukowania i koniecznie zawierać musi ona następujące oświadczenie:

> Niniejszy dokument jest reprodukowany za zgodą JCGM, któremu przysługuje chronione na poziomie międzynarodowym prawo autorskie do projektu i treści tego dokumentu oraz tytułów, haseł i logo JCGM. Na poziomie międzynarodowym chronione są również prawa autorskie organizacji członkowskich Organizacjom członkowskim JCGM również przysługuje pełne, chronione na poziomie międzynarodowym prawo w odniesieniu do ich tytułów, haseł oraz logo zawartych w publikacjach JCGM. Jedynymi oficjalnymi wersjami są oryginalne wersje dokumentów opublikowane przez JCGM

Zrzeczenie się

JCGM i jego organizacje członkowskie opublikowały niniejszy dokument, aby zwiększyć dostęp do informacji metrologicznej. Starają się one regularnie go aktualizować, ale nie mogą zagwarantować jego nieprzerwanej aktualności i nie ponoszą odpowiedzialności za jakiekolwiek bezpośrednie lub pośrednie szkody, które mogą wyniknąć z jego użytkowania. Jakiekolwiek odniesienia do wszelkiego rodzaju produktów komercyjnych (w tym między innymi do oprogramowania, danych lub sprzętu) lub też linki do stron internetowych, nad którymi JCGM i jego organizacje członkowskie nie mają kontroli i za które nie ponoszą żadnej odpowiedzialności, nie implikują żadnej zgody, poparcia ani zaleceń ze strony JCGM i jego organizacji członkowskich.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Spis treści

Przedmowa vi

0 Wstęp viii

1 Zakres 1

2 Definicje 2
2.1 Ogólne terminy metrologiczne 2
2.2 Termin "niepewność" 2
2.3 Terminy specyficzne dla *Przewodnika* 3

3 Pojęcia podstawowe 4
3.1 Pomiar 4
3.2 Błędy, oddziaływania i poprawki 5
3.3 Niepewność 5
3.4 Rozważania praktyczne 7

4 Wyznaczanie niepewności standardowej 8
4.1 Modelowanie pomiaru 8
4.2 Metoda typu A wyznaczania niepewności standardowej 10
4.3 Metoda typu B wyznaczania niepewności standardowej 12
4.4 Graficzna interpretacja wyznaczania niepewności standardowej 16

5 Określanie niepewności standardowej złożonej 19
5.1 Wielkości wejściowe nieskorelowane 19
5.2 Wielkości wejściowe skorelowane 22

6 Określanie niepewności rozszerzonej 24
6.1 Wprowadzenie 24
6.2 Niepewność rozszerzona 25
6.3 Wybór współczynnika rozszerzenia 25

7 Podawanie niepewności 26
7.1 Wskazówki ogólne 26
7.2 Wskazówki szczegółowe 27

8 Skrócona procedura wyznaczania i wyrażania niepewności 29

Aneks A Zalecenia Grupy Roboczej i CIPM 30
A.1 Zalecenie INC-1 (1980) 30
A.2 Zalecenie 1 (CI-1981) 31
A.3 Zalecenie 1 (CI-1986) 31

Aneks B Ogólne terminy metrologiczne 32
B.1 Źródło definicji 32
B.2 Definicje 32

Aneks C Podstawowe terminy i pojęcia statystyczne 39
C.1 Źródło definicji 39
C.2 Definicje 39
C.3 Wyjaśnienie terminów i pojęć 45

Aneks D Wartość "prawdziwa", błąd i niepewność 48
D.1 Menzurand 48
D.2 Wielkość realizowana 48
D.3 Wartość "prawdziwa" i wartość poprawiona 48
D.4 Błąd 49
D.5 Niepewność 49
D.6 Interpretacja graficzna 50

Aneks E Motywacja i podstawy Zalecenia INC-1 (1980) 53
E.1 "Bezpieczny", "przypadkowy" i "systematyczny" 53

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

E.2 Uzasadnienie realistycznego wyznaczania niepewności ... 53
E.3 Uzasadnienie identycznego traktowania wszystkich składowych niepewności ... 54
E.4 Odchylenia standardowe jako miary niepewności ... 57
E.5 Porównanie dwóch interpretacji niepewności ... 58

Aneks F Wskazówki praktyczne dotyczące wyznaczania składowych niepewności ... 60
F.1 Składowe niepewności wyznaczane na podstawie powtórzonych obserwacji: metoda typu A wyznaczania niepewności standardowej ... 60
F.2 Składowe niepewności wyznaczane innymi metodami: metoda typu B wyznaczania niepewności standardowej ... 63

Aneks G Stopnie swobody i poziomy ufności ... 70
G.1 Wprowadzenie ... 70
G.2 Centralne twierdzenie graniczne ... 71
G.3 Rozkład *t*-Studenta i stopnie swobody ... 72
G.4 Wypadkowa liczba stopni swobody ... 73
G.5 Dalsze rozważania ... 75
G.6 Podsumowanie i wnioski ... 77

Aneks H Przykłady ... 80
H.1 Wzorcowanie płytki wzorcowej ... 80
H.2 Równoczesny pomiar rezystancji i reaktancji ... 86
H.4 Pomiar aktywności ... 95
H.5 Analiza wariancji ... 99
H.6 Pomiary w skali odniesienia: twardość ... 105

Aneks J Wykaz podstawowych symboli ... 110

Bibliografia ... 114

Skorowidz ... 116

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Przewodnik ustala ogólne zasady wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru, które mogłyby być przyjęte do stosowania w szerokim zakresie pomiarów. Podstawą *Przewodnika* jest Zalecenie 1 (CI-1981) Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM) oraz Zalecenie INC-1 (1980) Grupy Roboczej ds. Określania Niepewności. Grupa Robocza została powołana przez Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM) w odpowiedzi na prośbę CIPM. Zalecenie CIPM jest jedynym zaleceniem dotyczącym wyrażania niepewności pomiaru przyjętym przez organizację międzynarodową.

Przewodnik został przygotowany przez wspólną grupę roboczą składającą się z ekspertów wytypowanych przez BIPM, Międzynarodową Komisję Elektrotechniczną (IEC), Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) i Międzynarodową Organizację Metrologii Prawnej (OIML).

Poniższe siedem organizacji* poparło wydanie *Przewodnika*, który został opublikowany w ich imieniu:

BIMP: Międzynarodowe Biuro Miar

IEC: Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna

IFCC: Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej**

ISO: Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna

IUPAC: Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej

IUPAP: Międzynarodowa Unia Fizyki Teoretycznej i Stosowanej

OIML: Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej

Użytkownicy tego *Przewodnika* proszeni są o przesyłanie swoich komentarzy i próśb o wyjaśnienia do jednej z siedmiu organizacji wspierających, których adresy pocztowe są podane na wewnętrznej stronie okładki***

* **Przypis do wersji 2008:**

W 2005 roku ILAC (Międzynarodowa Współpraca w zakresie Akredytacji Laboratoriów) oficjalnie dołączyła do siedmiu organizacji założycielskich

** **Przypis do wersji 2008:**

Nazwa tej organizacji zmieniła się w 1995 roku na: Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej i Medycyny Laboratoryjnej

*** **Przypis do wersji 2008:**

Linki do adresów ośmiu organizacji obecnie zaangażowanych w JCGM (Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii) są podane na stronie: http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Przedmowa

W 1977 roku, biorąc pod uwagę fakt, że w skali międzynarodowej brakuje konsensusu co do sposobu wyrażania niepewności pomiaru, Międzynarodowy Komitet Miar (CIPM), najwyższy światowy autorytet w dziedzinie metrologii, zobowiązał Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM), aby w porozumieniu z krajowymi laboratoriami wzorców zajęło się tym problemem i opracowało odpowiednie zalecenie.

BIPM przygotował szczegółowy kwestionariusz obejmujący poruszone zagadnienia i rozesłał go do 32 krajowych laboratoriów metrologicznych zainteresowanych tym zagadnieniem (i, dla informacji, do pięciu organizacji międzynarodowych). Na początku 1979 roku otrzymano odpowiedzi z 21 laboratoriów [1][1)]. Prawie wszyscy byli przekonani, że stanowiło to ważny krok na drodze do opracowania międzynarodowo uznawanej procedury wyrażania niepewności pomiaru oraz łączenia poszczególnych składowych niepewności w jedną całkowitą niepewność. Jednakże nie było zgodności co do metody, którą należałoby zastosować. BIPM zorganizował więc spotkanie mające na celu opracowanie jednolitej i ogólnie akceptowanej procedury określania niepewności pomiaru. W spotkaniu uczestniczyli eksperci z 11 krajowych laboratoriów utrzymujących wzorce. Tak powstała Grupa Robocza ds. Określania Niepewności, która opracowała Zalecenie INC-1 (1980) Wyrażanie Niepewności Eksperymentalnych [2]. Zalecenie to zostało zaaprobowane przez CIPM w 1981 r. [3] i ponownie potwierdzone w 1986 r. [4].

CIPM przekazało zadanie opracowania szczegółowego przewodnika opartego na Zaleceniu Grupy Roboczej (które jest raczej krótkim podsumowaniem niż szczegółowym przepisem) Międzynarodowej Organizacji Normalizacyjnej (ISO), która lepiej może określić wymagania stwarzane przez przemysł i handel w szerokich obszarach ich zainteresowania.

Odpowiedzialność za realizację tego zadania powierzono Doradczej Grupie Technicznej ISO ds. Metrologii (TAG 4), ponieważ jednym z jej zadań jest koordynowanie opracowywania wytycznych odnoszących się do zagadnień metrologicznych, mieszczących się we wspólnym obszarze zainteresowań ISO i sześciu organizacji, które uczestniczą wraz z ISO w pracy TAG 4. Organizacje te to: Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna (IEC), partner ISO w światowej normalizacji; CIPM i Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej (OIML), dwie światowe organizacje metrologiczne; Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC) i Międzynarodowa Unia Fizyki Teoretycznej i Stosowanej (IUPAP), dwie międzynarodowe unie reprezentujące chemię i fizykę i Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej (IFCC).

TAG 4 z kolei powołał grupę Roboczą 3 (ISO/TAG 4/WG 3) złożoną z ekspertów wyznaczonych przez BIPM, IEC, ISO i OIML i uzgodnionych z przewodniczącym TAG 4. Ustalono następujący zakres działania:

> Opracowanie dokumentu o charakterze przewodnika opartego na Zaleceniu Grupy Roboczej BIPM ds. Określania Niepewności, który przedstawiałby reguły postępowania przy wyrażaniu niepewności pomiaru z przeznaczeniem do stosowania w obrębie normalizacji, wzorcowań, akredytacji laboratoriów i służb pomiarowych.
>
> Celem tego przewodnika jest:
>
> – przedstawianie pełnej informacji o sposobie określania niepewności pomiaru,
>
> – stworzenie podstaw do międzynarodowego porównywania wyników pomiarów.

1) Patrz Bibliografia

* **Przypis do wersji 2008:**

Opracowując niniejszą wersję Przewodnika w 2008 roku, JCGM/WG 1 wprowadził niezbędne poprawki tylko do wydrukowanej wersji z 1995 roku. Poprawki te występują w podrozdziałach 4.2.2, 4.2.4, 5.1.2, B.2.17, C.3.2, C.3.4, E.4.3, H.4.3, H.5.2.5 i H.6.2.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Poprawiona wersja dokumentu JCGM 100:2008 wprowadza następujące zmiany:

- przypis oznaczony ** został skorygowany;
- w 4.1.1 Uwaga została wcięta;
- w pierwszej linii przykładu w 5.1.5 ΔV została zastąpiona przez $\Delta \overline{V}$;
- w pierwszej linii B.2 i C.2 rozdział 0 został skorygowany jako rozdział 2;
- w G.3.2 (G,1c) zostało zastąpione (G.1c);
- w H.1.3.4 formatowanie pierwszego równania zostało poprawione.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

0 Wstęp

0.1 Podając wynik pomiaru wielkości fizycznej, należy koniecznie podać także pewną ilościową informację o jakości tego wyniku, tak aby korzystający z tego wyniku mógł ocenić jego wiarygodność. Bez takiej informacji wyniki pomiarów nie mogą być porównywane ani między sobą, ani z wartościami odniesienia podawanymi w specyfikacji lub normie. Potrzebna jest więc wygodna w stosowaniu, zrozumiała i powszechnie akceptowana procedura charakteryzowania jakości wyniku pomiaru, to jest procedura wyznaczania i wyrażania jego *niepewności*.

0.2 Pojęcie *niepewności* jako pewnej liczbowo wyrażanej cechy jest stosunkowo nowe w historii pomiarów, choć *błąd* i *analiza błędów* o dawna są częścią wiedzy o pomiarach, czyli metrologii. Wiadomo powszechnie, że gdy obliczy się wszystkie znane albo oczekiwane składowe błędu i gdy wprowadzi się je jako odpowiednie poprawki, to pozostaje jeszcze niepewność co do poprawności tak otrzymanego wyniku, to jest wątpliwości na ile dobrze wynik pomiaru reprezentuje wartość wielkości będącej przedmiotem pomiaru.

0.3 Tak właśnie, jak niemalże powszechne stosowanie Międzynarodowego Układu Jednostek Miar SI przyniosło spójność wszystkich pomiarów w nauce i technice, tak uzgodnienie, w skali światowej, poglądów co do wyznaczania i wyrażania niepewności pomiarów umożliwiłoby pełną zrozumiałość i właściwą interpretację wyników ogromnej liczby pomiarów wykonywanych w nauce, technice, handlu, przemyśle i zarządzaniu. W erze globalnego rynku koniecznością jest ujednolicenie w skali międzynarodowej metod wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru, tak aby pomiary wykonywane w różnych krajach można było łatwo porównywać.

0.4 Idealna metoda wyznaczania i wyrażania niepewności wyniku pomiaru powinna być:

- *uniwersalna*: powinna być stosowalna do wszystkich rodzajów pomiarów i do wszystkich typów danych wejściowych używanych w pomiarach.

Wielkość zastosowana do wyrażania niepewności powinna być:

- *wewnętrznie spójna*: powinna być bezpośrednio wyznaczalna z elementów na nią się składających, jak również niezależna od sposobu pogrupowania tych elementów i dalszego ich rozłożenia na elementy prostsze,

- *przechodnia*: wyznaczona niepewność wyniku pomiaru powinna być możliwa do bezpośredniego zastosowania jako składowa przy wyznaczaniu niepewności innego pomiaru, w którym pierwszy wynik jest stosowany.

Dalej, w wielu zastosowaniach przemysłowych i handlowych, jak również w dziedzinie ochrony zdrowia i zapewnienia bezpieczeństwa, trzeba często podawać przedział wokół wyniku pomiaru taki, iż można oczekiwać, że obejmuje on dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości stanowiącej przedmiot pomiaru. Idealna metoda wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru powinna więc umożliwiać szybkie określanie tego przedziału, a w szczególności przedziału z prawdopodobieństwem rozszerzenia, czyli poziomem ufności, realistycznie odpowiadającym wymaganemu.

0.5 Koncepcja podejścia, stanowiącego podstawę tego dokumentu, przedstawiona jest przez Zalecenie INC-1 (1980) [2] Grupy Roboczej ds. Określania Niepewności powołanej przez BIMP na prośbę CIPM (patrz Przedmowa). Podejście to, którego uzasadnienie przedstawiono w aneksie E, spełnia wszystkie podane wyżej wymagania. Wymagań tych natomiast nie spełnia większość innych metod aktualnie stosowanych. Zalecenie INC-1 (1980) zostało zaaprobowane i potwierdzone przez CIPM w jego własnych Zaleceniach: 1 (CI-1981) [3] i 1 (CI-1986) [4]; tłumaczenia tych zaleceń podano w aneksie A (patrz A.2 i A.3 odpowiednio). Ponieważ Zalecenie INC-1 (1980) jest podstawą, na której opiera się reszta dokumentów, jego tłumaczenie podano w 0.7, a oryginalny tekst francuski w A.1.

0.6 Zwięzłe podsumowanie procedury wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru opisanej w tym dokumencie podano w rozdziale 8, a kilka przykładów przedstawiono szczegółowo w aneksie H. Pozostałe aneksy są poświęcone: ogólnym terminom metrologicznym (aneks B); podstawowym terminom i pojęciom statystycznym (aneks C); wartości "prawdziwej", błędowi i niepewności (aneks D); praktycznym wskazówkom dotyczącym wyznaczania składowych niepewności (aneks F); stopniom swobody i poziomom ufności (aneks

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

G). Aneks J jest wykazem podstawowym symboli matematycznych stosowanych w dokumencie. Wykaz literatury zawarty jest w Bibliografii. Alfabetyczny skorowidz kończy dokument.

0.7 Zalecenie INC-1 (1980) Wyrażanie niepewności eksperymentalnych

1) Niepewność wyniku pomiaru ogólnie składa się z szeregu składowych, które można zgrupować w dwie kategorie, zgodnie ze sposobem oszacowania ich wartości liczbowych:

   A. takie, które zostały wyznaczone metodami statystycznymi;

   B. takie, które zostały wyznaczone innymi metodami.

   Nie zawsze zachodzi prosta odpowiedniość pomiędzy klasyfikacją na kategorie A i B, a wcześniej stosowaną klasyfikacją na niepewności "przypadkowe" i niepewności "systematyczne". Termin "niepewność systematyczna" może być mylący i należy go unikać.

   Szczegółowe przedstawienie niepewności powinno obejmować pełną listę składowych, z określoną metodą użytą do wyznaczenia wartości liczbowej każdej z nich.

2) Składowe kategorii A są charakteryzowane przez oszacowane wariancje s_i^2 (lub oszacowane "odchylenia standardowe" s_i) i liczby stopni swobody v_i Jeśli jest to wskazane, powinny być podane kowariancje.

3) Składowe kategorii B powinny być charakteryzowane przez wielkości u_j^2, które można rozpatrywać jako przybliżone wartości odpowiednich wariancji, których istnienie zakłada się. Wielkości u_j^2 można traktować jak wariancje, a wielkości u_j jak odchylenia standardowe. Jeżeli jest to wskazane, w podobny sposób powinny być traktowane kowariancje.

4) Niepewność złożona powinna być charakteryzowana przez wartość liczbową otrzymaną przez zastosowanie zwykłej metody składania wariancji. Niepewność złożona i jej składowe powinny być wyrażane w formie "odchyleń standardowych".

5) Jeżeli w pewnych zastosowaniach trzeba pomnożyć niepewność złożoną przez pewien współczynnik, aby otrzymać niepewność całkowitą, to należy zawsze podawać wartość tego współczynnika.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Opracowanie danych pomiarowych – Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru

1 Zakres

1.1 *Przewodnik* przedstawia ogólne reguły wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru, które mogą znaleźć zastosowanie w pomiarach o dowolnej dokładności i we wszystkich dziedzinach – od pomiarów handlowych do pomiarów naukowych. Dlatego zasady przedstawione w *Przewodniku* są przeznaczone do stosowania w szerokim zakresie, a w szczególności odnoszą się do pomiarów realizowanych przy:

- utrzymywaniu kontroli jakości i zapewnianiu jakości w produkcji,
- wprowadzaniu i przestrzeganiu zarządzeń i przepisów,
- prowadzeniu badań podstawowych i wdrożeniowych oraz wykorzystywaniu ich wyników w nauce i technice,
- kalibracji wzorców i przyrządów oraz wykonywaniu badań w zakresie krajowego systemu miar, prowadzących do poprawy jego powiązania z wzorcami państwowymi,
- rozwijaniu, utrzymywaniu i porównywaniu wzorców międzynarodowych i państwowych, z materiałami odniesienia włącznie.

1.2 *Przewodnik* zajmuje się przede wszystkim wyrażaniem niepewności pomiaru dobrze określonej wielkości fizycznej stanowiącej menzurand, który może być scharakteryzowany zasadniczo przez pojedynczą wartość. Jeśli rozpatrywane zjawisko może być opisane tylko przez pewien rozkład wartości lub jest zależne od jednego lub więcej parametrów, takich jak czas, wtedy menzurandy niezbędne do jego opisu są zbiorem wielkości opisujących ten rozkład lub tę zależność.

1.3 *Przewodnik* może być zastosowany także przy wyznaczaniu i wyrażaniu niepewności związanych z planowaniem koncepcyjnym i analizą teoretyczną eksperymentów, metodami oraz złożonymi systemami pomiarowymi. Ponieważ wynik pomiaru i jego niepewność mogą mieć charakter tylko pojęć koncepcyjnych i mogą być w całości oparte na danych hipotetycznych, termin "wynik pomiaru" używany w *Przewodniku* należy rozumieć w tym szerszym kontekście.

1.4 *Przewodnik* podaje ogólne zasady wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru niż szczegółowe instrukcje, specyficzne dla danej dziedziny technicznej. Dalej, nie dyskutuje się w nim w jaki sposób niepewność pewnego wyniku pomiaru raz wyznaczona może być wykorzystana do innych celów, jak na przykład, do rozważania zgodności tego wyniku z innymi podobnymi wynikami, czy do ustalania granic tolerancji w procesie produkcyjnym, czy do podjęcia decyzji, że pewne działania mogą być realizowane bezpiecznie. Może zatem okazać się konieczne opracowanie szczegółowych norm opartych na *Przewodniku*, które dotyczyłyby specyficznych dziedzin pomiarowych oraz różnorodnego zastosowania ilościowych miar niepewności.* Normy te mogą być uproszczonymi wersjami *Przewodnika*, ale powinny zawierać szczegółowe rozwiązania, adekwatne do poziomu dokładności i złożoności pomiarów, których dotyczą.

UWAGA Mogą zdarzyć się sytuacje, w których pojęcie niepewności pomiaru wydaje się nie być w pełni stosowalne, na przykład gdy określona jest precyzja metody badawczej (patrz [5] jako przykład).

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Od czasu pierwszego wydania *Przewodnika* opublikowano wiele pochodnych dokumentów ogólnych i szczegółowych. Wybraną listę tych dokumentów można znaleźć na stronie http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg1_bibliography.html.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

2 Definicje

2.1 Ogólne terminy metrologiczne

Definicje ogólnych terminów metrologicznych stosowanych w *Przewodniku*, takich jak "wielkość mierzalna", "menzurand" i "błąd pomiaru" podano w aneksie B. Definicje te zaczerpnięto z *Międzynarodowego słownika podstawowych i ogólnych terminów metrologii* (akronim VIM)* [6]. Ponadto w aneksie C podano definicje niektórych podstawowych terminów statystycznych zaczerpniętych z Normy ISO 3534-1 [7]. Termin metrologiczny lub statystyczny (lub termin ściśle z nimi związany) po raz pierwszy użyty w tekście, poczynając od rozdziału 3, drukowany jest czcionką pogrubioną, a w nawiasie podawany jest numer podrozdziału zawierającego jego definicję.

Z powodu szczególnego znaczenia w *Przewodniku*, definicja terminu "niepewność pomiaru" jest podana zarówno w aneksie B jak i w 2.2.3. Definicje najważniejszych terminów specyficznych dla *Przewodnika* są podane w 2.3.1 do 2.3.6. W podrozdziałach tych oraz w aneksach B i C słowa w nazwach pewnych pojęć objęte nawiasami można pomijać, jeżeli ich pominięcie nie spowoduje pomyłki.

2.2 Termin "niepewność"

Pojęcie niepewności jest dyskutowane dalej w punkcie 3 i aneksie D.

2.2.1 Słowo "niepewność" oznacza wątpliwość i stąd w szerokim znaczeniu "niepewność pomiaru" oznacza wątpliwość co do wartości wyniku pomiaru. Z powodu braku różnych słów na oznaczenie *pojęcia ogólnego* niepewności i specyficznych wielkości będących *miarami ilościowymi* tego pojęcia, na przykład odchylenia standardowego, koniecznym jest używanie słowa "niepewność" w tych dwóch różnych znaczeniach.

2.2.2 W *Przewodniku* słowo "niepewność" bez dodatkowych przymiotników odnosi się zarówno do pojęcia ogólnego niepewności, jak i do niektórych, czy też wszystkich miar ilościowych tego pojęcia. Gdy mowa jest o pewnej specyficznej mierze, użyte są odpowiednie przymiotniki.

2.2.3 Definicja formalna terminu "niepewność pomiaru", przyjęta i stosowana w *Przewodniku*, zamieszczona w słowniku terminologicznym (VIM pozycja 3.9), jest następująca:

niepewność (pomiaru)
parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać menzurandowi.

UWAGA 1 Takim parametrem może być na przykład odchylenie standardowe (lub jego wielokrotność), albo połowa szerokości przedziału mającego ustalony poziom ufności.

UWAGA 2 Niepewność pomiaru zawiera na ogół wiele składowych. Niektóre z nich można wyznaczyć na podstawie rozkładu statystycznego wyników szeregu pomiarów i można je scharakteryzować odchyleniem standardowym eksperymentalnym. Inne składowe, które mogą być również charakteryzowane odchyleniami standardowymi, wyznacza się na podstawie rozkładów prawdopodobieństwa opartych na doświadczeniu lub na innych informacjach.

UWAGA 3 Przyjmuje się, że wynik pomiaru stanowi najlepsze oszacowanie wartości menzurandu i że wszystkie składowe niepewności, włącznie z tymi, które pochodzą od oddziaływań systematycznych, jak na przykład składowe związane z poprawkami lub z wzorcami odniesienia, wnoszą swój udział do rozrzutu.

2.2.4 Definicja niepewności pomiaru, mająca charakter operacyjny, podana w 2.2.3 dotyczy wyniku pomiaru i oceny jego niepewności. Jednakże, nie jest ona niespójna z innymi koncepcjami niepewności pomiaru takimi jak:

- miara możliwego błędu oszacowanej wartości menzurandu otrzymanej jako wynik z pomiaru,
- estymata charakteryzująca zakres wartości, w którym leży wartość prawdziwa menzurandu.

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Trzecie wydanie słownika zostało opublikowane w 2008 roku pod tytułem JCGM 200:2008 *Międzynarodowy słownik metrologii – Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nim związane (VIM)*.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Chociaż te dwie tradycyjne koncepcje są ważne jako idee, to odnoszą się do *nieznanych* wielkości, takich jak "błąd" wyniku pomiaru i "wartość prawdziwa" menzurandu (w przeciwieństwie do jego wartości oszacowanej). Jednakże, niezależnie od przyjętej *koncepcji* niepewności, składowa niepewności jest zawsze *wyznaczana* w oparciu o te same dane i na podstawie odpowiedniej informacji (patrz także E.5).

2.3 Terminy specyficzne dla *Przewodnika*

Terminy specyficzne dla *Przewodnika* są definiowane w tekście tam, gdzie po raz pierwszy są użyte. Jednakże definicje najważniejszych z tych terminów zestawione są poniżej.

UWAGA Dalsze rozważania odnoszące się do tych terminów można znaleźć: dla terminu 2.3.2 patrz 3.3.3 i 4.2; dla terminu 2.3.3 patrz 3.3.3 i 4.3; dla terminu 2.3.4 patrz rozdział 5 i równania (10) i (13); dla terminu 2.3.5 oraz 2.3.6 patrz rozdział 6.

2.3.1
niepewność standardowa
niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego

2.3.2
metoda typu A wyznaczania niepewności
metoda wyznaczania niepewności realizowana drogą analizy statystycznej serii obserwacji

2.3.3
metoda typu B wyznaczania niepewności
metoda wyznaczania niepewności realizowana innymi sposobami niż analiza serii obserwacji

2.3.4
niepewność standardowa złożona
niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany z wartości pewnej liczby innych wielkości, równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy wyrazów, będących wariancjami lub kowariancjami tych innych wielkości z wagami zależnymi od tego, jak wynik pomiaru zmienia się wraz ze zmianami tych wielkości

2.3.5
niepewność rozszerzona
wielkość definiująca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmie on dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać menzurandowi.

UWAGA 1 Ułamek wyznaczający powyższą część rozkładu można traktować jak prawdopodobieństwo rozszerzenia lub poziom ufności tego przedziału.

UWAGA 2 Aby z przedziałem wyznaczonym przez niepewność rozszerzoną powiązać pewien poziom ufności, trzeba jawnie lub domyślnie założyć rozkład prawdopodobieństwa określany przez wynik pomiaru i jego niepewność standardową złożoną. Poziom ufności przypisany do tego przedziału może być wyznaczony tylko do takiego stopnia, do jakiego te założenia są uzasadnione.

UWAGA 3 Niepewność rozszerzona jest nazywana *niepewnością całkowitą* w paragrafie 5 Zalecenia INC-1 (1980).

2.3.6
współczynnik rozszerzenia
współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik niepewności standardowej złożonej w celu otrzymania niepewności rozszerzonej.

UWAGA Współczynnik rozszerzenia k przyjmuje zazwyczaj wartości z zakresu od 2 do 3.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

3 Pojęcia podstawowe

Dodatkowe rozważania dotyczące pojęć podstawowych znajdują się w aneksie D, który koncentruje się na koncepcji związanej z pojęciami wartości "prawdziwej", błędu i niepewności. W aneksie E omówiono motywacje i podstawy statystyczne dotyczące Zalecenia INC-1 (1980), na których opiera się *Przewodnik*. Aneks J jest wykazem podstawowych symboli matematycznych zastosowanych w *Przewodniku*.

3.1 Pomiar

3.1.1 Celem **pomiaru** (B.2.5) jest określenie **wartości** (B.2.2) **menzurandu** (B.2.9), to jest wartości **wielkości określonej** (B.2.1, uwaga 1) poddanej pomiarowi. Pomiar więc zaczyna się określeniem menzurandu, **metody pomiarowej** (B.2.7) i **procedury pomiarowej** (B.2.8).

UWAGA Termin "wartość prawdziwa" (patrz aneks D) nie jest stosowany w *Przewodniku* z powodów podanych w D.3.5. Terminy "wartość menzurandu" (lub wielkości) i "wartość prawdziwa menzurandu" (lub wielkości) są traktowane jako równoważne.

3.1.2 Zwykle **wynik pomiaru** (B.2.11) jest tylko przybliżeniem lub **estymatą** (C.2.26) wartości menzurandu i dlatego wynik pomiaru jest pełny tylko wtedy, gdy jest podany wraz z **niepewnością** (B.2.18) tej estymaty.

3.1.3 W praktyce wymagana specyfikacja lub definicja menzurandu zależą od wymaganej **dokładności pomiaru** (B.2.14). Menzurand powinien być zdefiniowany wystarczająco kompletnie w stosunku do wymaganej dokładności, tak aby dla wszystkich faktycznych celów związanych z pomiarem jego wartość była jedyną. W tym właśnie sensie wyrażenie "wartość menzurandu" stosowane jest w *Przewodniku*.

PRZYKŁAD Gdy długość pręta stalowego o nominalnej wartości jednego metra ma być wyznaczona z dokładnością do mikrometra, to w jego specyfikacji powinna być podana temperatura i ciśnienie, dla których ta długość jest określona. Zatem menzurand powinien być określony na przykład jako długość pręta w temperaturze 25,00 °C* i pod ciśnieniem 101 325 Pa (plus jakiekolwiek parametry, które wydają się być niezbędne, takie jak np. sposób umocowania pręta). Jednakże, jeżeli długość ma być wyznaczona z dokładnością tylko do milimetra, jej specyfikacja nie wymaga podawania temperatury czy ciśnienia, czy też wartości innych parametrów.

UWAGA Niepełna definicja menzurandu może powodować składową niepewności na tyle dużą, że należy ją uwzględniać przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru (patrz D.1.1, D.3.4 i D.6.2).

3.1.4 W wielu przypadkach wynik pomiaru jest określany na podstawie serii obserwacji otrzymanych w **warunkach powtarzalności** (B.2.15, uwaga 1).

3.1.5 Przyjmuje się, że zmiany wyników powtarzanych obserwacji powstają, ponieważ **wielkości wpływające** (B.2.10), które mogą mieć wpływ na wynik pomiaru, nie mają niezmiennych wartości w czasie dokonywania obserwacji.

3.1.6 Model matematyczny procedury pomiarowej, który przekształca zbiór powtórzonych obserwacji w wynik pomiaru ma szczególne znaczenie, ponieważ zwykle, oprócz wyników obserwacji zawiera także różne wielkości wpływające, które nie są dokładnie znane. Ten brak informacji wraz ze zmiennością powtarzanych obserwacji i niepewnością związaną z modelem matematycznym jako takim wpływa na niepewność pomiaru.

3.1.7 *Przewodnik* traktuje menzurand jako skalar (pojedynczą wielkość). Rozszerzenie rozważań na zbiór powiązanych menzurandów, określanych równocześnie w tym samym pomiarze, wymaga zastąpienia skalarnego menzurandu i jego **wariancji** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) menzurandem wektorowym i **macierzą kowariancji** (C.3.5). Takie postępowanie jest rozważane w *Przewodniku* tylko w przykładach (patrz H.2, H.3 i H.4).

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Zgodnie z rezolucją nr 10 z 22. CGPM (2003) „... symbolem znaku dziesiętnego jest albo punkt na linii, albo przecinek na linii ...". JCGM postanowił przyjąć w swoich dokumentach w języku angielskim punkt na linii. Jednak w tym dokumencie przecinek dziesiętny został zachowany dla spójności z wersją drukowaną z 1995 roku.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

3.2 Błędy, oddziaływania i poprawki

3.2.1 Zwykle pomiar zawiera wiele niedoskonałości, które przyczyniają się do powstania **błędu** (B.2.19) wyniku pomiaru. Tradycyjnie przyjmuje się, że błąd ma dwie składowe, mianowicie składową **przypadkową** (B.2.21) i składową **systematyczną** (B.2.22).

UWAGA Błąd jest pojęciem idealizowanym i błędy nie mogą być znane dokładnie.

3.2.2 Błąd przypadkowy przypuszczalnie wynika z nieprzewidywalnych (stochastycznych) czasowych i przestrzennych zmian wielkości wpływających. Czynniki wywołujące takie zmiany, nazywane dalej *oddziaływaniami przypadkowymi*, powodują zmiany w wynikach powtarzanych obserwacji menzurandu. Chociaż błąd przypadkowy wyniku pomiaru nie może być skompensowany, to może zazwyczaj być zmniejszony przez zwiększenie liczby obserwacji, a jego **wartość oczekiwana** (C.2.9, C.3.1) wynosi zero.

UWAGA 1 Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej arytmetycznej serii obserwacji (patrz 4.2.3) nie jest błędem przypadkowym średniej, chociaż tak jest to przedstawione w niektórych publikacjach dotyczących niepewności. Jest ono natomiast miarą *niepewności* średniej arytmetycznej powodowanej wpływami czynników przypadkowych. Dokładna wartość błędu średniej arytmetycznej wywołanego tymi czynnikami pozostaje nieznana.

UWAGA 2 W *Przewodniku* przywiązuje się dużą wagę do rozróżnienia pomiędzy terminami "błąd" i "niepewność". Nie są one synonimami, ale reprezentują całkiem różne pojęcia. Nie powinny być zatem mieszane z sobą i niewłaściwie używane.

3.2.3 Błąd systematyczny, podobnie jak błąd przypadkowy, nie może być całkowicie wyeliminowany, ale często może być zredukowany. Jeżeli błąd systematyczny powstaje wskutek rozpoznanego działania wielkości wpływającej na wynik pomiaru, dalej będzie ono nazywane *oddziaływaniem systematycznym*, to wynik tego oddziaływania może być określony ilościowo. Jeśli jest on znaczny w porównaniu z wymaganą dokładnością pomiaru, to aby jego wpływ skompensować, wprowadza się addytywnie **poprawkę** (B.2.23) lub multiplikatywnie **współczynnik poprawkowy** (B.2.24). Zakłada się, że po wprowadzeniu poprawki wartość oczekiwana błędu wynikającego z oddziaływania systematycznego wynosi zero.

UWAGA Niepewność poprawki kompensującej wpływ oddziaływania systematycznego na wynik pomiaru nie jest, jak niekiedy się to przedstawia, błędem systematycznym, nazywanym często obciążeniem, wyniku pomiaru wywołanym tym oddziaływaniem. Jest ona natomiast miarą *niepewności* wyniku z powodu niepełnej wiedzy o wartości jaką powinna mieć poprawka. Błąd wynikający z niedoskonałej kompensacji oddziaływania systematycznego nie może być znany dokładnie. Terminy "błąd" i "niepewność" powinny być właściwie stosowane i należy uważać, aby odróżniać je od siebie.

3.2.4 Zakłada się, że wynik pomiaru został skorygowany dla wszystkich rozpoznanych istotnych oddziaływań systematycznych i dołożono wszelkich starań, aby takie oddziaływania rozpoznać.

PRZYKŁAD Przy pomiarze napięcia na wysokoimpedancyjnym oporniku uwzględnia się poprawkę w celu zmniejszenia oddziaływania systematycznego, będącego wynikiem wpływu obciążenia opornika skończoną impedancją zastosowanego woltomierza. Jednakże wartości impedancji woltomierza i opornika, użyte do oszacowania wartości poprawki, zostały wyznaczone na drodze innych pomiarów i same są obarczone niepewnościami. Niepewności tych używa się do wyznaczenia składowej niepewności pomiaru napięcia pochodzącej z poprawki, a tym samym z oddziaływania systematycznego wynikającego ze skończonej impedancji woltomierza.

UWAGA 1 Często przyrządy i systemy pomiarowe, w celu wyeliminowania oddziaływań systematycznych, są adjustowane lub wzorcowane przy użyciu wzorców i materiałów odniesienia. Jednakże wówczas należy brać pod uwagę niepewności związane z tymi wzorcami i materiałami.

UWAGA 2 Przypadek, w którym nie uwzględniono poprawki od znanego oddziaływania systematycznego, jest dyskutowany w uwadze do 6.3.1 i w F.2.4.5.

3.3 Niepewność

3.3.1 Niepewność wyniku pomiaru przedstawia brak ścisłej wiedzy dotyczącej wartości menzurandu (patrz 2.2). Wynik pomiaru po korekcji rozpoznanych oddziaływań systematycznych pozostaje wciąż tylko *estymatą* wartości menzurandu, z powodu niepewności wynikającej z oddziaływań przypadkowych i z niedoskonałej korekcji oddziaływań systematycznych.

UWAGA Wynik pomiaru (po korekcji) może być w nieznanym stopniu bardzo bliski wartości menzurandu (i stąd mieć zaniedbywalny błąd) nawet, gdy ma dużą niepewność. Tak więc niepewność wyniku pomiaru nie powinna być mylona z pozostałym nieznanym błędem.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

3.3.2 W praktyce istnieje wiele możliwych źródeł niepewności pomiaru:

a) niepełna definicja menzurandu,

b) niedoskonała realizacja definicji menzurandu,

c) niereprezentatywne próbkowanie – próbka mierzona może nie reprezentować zdefiniowanego menzurandu,

d) niepełna znajomość warunków środowiskowych lub niedoskonały ich pomiar,

e) subiektywne błędy w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych,

f) skończona rozdzielczość albo próg pobudliwości przyrządu,

g) niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia,

h) niedokładne wartości stałych i innych parametrów otrzymywanych ze źródeł zewnętrznych do pomiaru, a używanych w procedurach przetwarzania danych,

i) przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej,

j) zmiany w powtarzanych obserwacjach menzurandu w pozornie identycznych warunkach.

Wymienione przyczyny nie muszą być od siebie niezależne, niektóre z przyczyn od a) do i) mogą składać się na przyczyny typu j). Oczywiście, nierozpoznane oddziaływanie systematyczne nie może być wzięte pod uwagę przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru, ale wchodzi w skład jego błędu.

3.3.3 Zalecenie INC-1 (1980) Grupy Roboczej ds. Określania Niepewności klasyfikuje składowe niepewności na dwie kategorie w zależności od metody ich wyznaczania "A" i "B" (patrz 0.7, 2.3.2 i 2.3.3). Kategorie te odnoszą się do *niepewności* i nie są czymś zastępczym dla słów "przypadkowy" i "systematyczny". Niepewność poprawki od znanego oddziaływania systematycznego może być w niektórych przypadkach wyznaczona metodą typu A, a w niektórych metodą typu B. To samo może dotyczyć niepewności charakteryzującej oddziaływania przypadkowe.

UWAGA W niektórych publikacjach składowe niepewności są klasyfikowane na "przypadkowe" i "systematyczne" i są wiązane z błędami wynikającymi z oddziaływań przypadkowych i oddziaływań systematycznych, odpowiednio. Taka klasyfikacja składowych niepewności może być dwuznaczna, gdy stosuje się ją jako ogólną. Przykładowo, składowa "przypadkowa" niepewności w jednym pomiarze może stać się składową "systematyczną" niepewności w innym pomiarze, w którym wynik pierwszego pomiaru jest zastosowany jako dane wejściowe. Klasyfikując raczej *metody* wyznaczania składowych niepewności niż same *składowe* unika się tej dwuznaczności. Równocześnie jednak nie wyklucza to grupowania poszczególnych składowych, wyznaczonych różnymi metodami, w grupy, odpowiednio do określonego celu (patrz 3.4.3).

3.3.4 Celem klasyfikacji metod na typ A i typ B jest wskazanie dwóch różnych sposobów wyznaczania składowych niepewności i ułatwienie rozważań. Celem klasyfikacji nie jest wskazywanie różnic w naturze składowych wyznaczanych różnymi metodami. Oba typy wyznaczania są oparte na **rozkładach prawdopodobieństwa** (C.2.3), a składowe niepewności wyznaczania zarówno jedną jak i drugą metodą są określane w kategoriach wariancji lub odchyleń standardowych.

3.3.5 Oszacowana wariancja u^2 charakteryzująca składową niepewności, otrzymana metodą typu A, jest obliczana z serii powtórzonych obserwacji i jest znaną statystycznie oszacowaną wariancją s^2 (patrz 4.2.). Oszacowane **odchylenie standardowe** u, czyli dodatni pierwiastek kwadratowy z u^2, spełnia równanie $u = s$, i dla wygody bywa czasami nazywane *niepewnością standardową typu A*. Składowa niepewności otrzymana metodą typu B, oszacowana wariancja u^2 jest wyznaczana na podstawie dostępnej wiedzy (patrz 4.3), a oszacowane odchylenie standardowe u jest czasami nazywane *niepewnością standardową typu B*.

Tak więc niepewność standardowa typu A jest wyznaczana z **funkcji gęstości prawdopodobieństwa** (C.2.5) otrzymanej z **obserwowanego rozkładu częstości** (C.2.18), podczas gdy niepewność standardowa typu B jest wyznaczana na podstawie założonej funkcji gęstości prawdopodobieństwa opartej na stopniu wiary w to, że zajdzie dane zdarzenie [często nazywanego **prawdopodobieństwem** subiektywnym (C.2.1.)]. Te dwa podejścia korzystają z uznanych interpretacji prawdopodobieństwa.

UWAGA Wyznaczanie składowej niepewności metodą typu B jest często oparte na zbiorze stosunkowo wiarygodnych informacji (patrz 4.3.1).

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

3.3.6 Niepewność standardowa wyniku pomiaru, gdy wynik ten jest otrzymany z wartości innych wielkości, jest nazywana *niepewnością standardową złożoną* i oznaczana przez u_c. Jest ona estymatą odchylenia standardowego związanego z wynikiem i równa jest dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji złożonej, otrzymanej ze wszystkich składowych wariancji i **kowariancji** (C.3.4), obliczonych dowolną metodą, zgodnie z zasadą nazywaną w *Przewodniku: prawem propagacji niepewności* (patrz rozdział 5).

3.3.7 Aby sprostać potrzebom pewnych zastosowań przemysłowych i handlowych, jak również wymaganiom w dziedzinie ochrony zdrowia i zapewnienia bezpieczeństwa, tworzy się *niepewność rozszerzoną* U poprzez pomnożenie niepewności standardowej złożonej u_c przez *współczynnik rozszerzenia* k. Niepewność rozszerzoną U wprowadza się po to, aby określić wokół wyniku pomiaru przedział, od którego oczekuje się, że obejmie dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać menzurandowi. Wybór wartości współczynnika k, zwykle zawartego w zakresie od 2 do 3, jest zależny od prawdopodobieństwa rozszerzenia lub wymaganego poziomu ufności przedziału (patrz rozdział 6).

UWAGA Współczynnik rozszerzenia k jest zawsze ustalany tak, że można z powrotem wyznaczyć niepewność standardową zmierzonej wielkości w celu wykorzystania jej do obliczania niepewności standardowej złożonej wyników innych pomiarów, które zależą od tej wielkości.

3.4 Rozważania praktyczne

3.4.1 Jeżeli zmieniają się wszystkie wielkości, od których zależy wynik pomiaru, jego niepewność może być wyznaczona metodami statystycznymi. Jednakże, z powodu ograniczeń czasowych i finansowych, rzadko kiedy jest to możliwe w praktyce. Niepewność wyniku pomiaru wyznacza się zwykle korzystając z modelu matematycznego pomiaru i prawa propagacji niepewności. Pociąga to za sobą przyjęte w *Przewodniku* założenie, że pomiar może być modelowany matematycznie w stopniu wynikającym z wymaganej dokładności pomiaru.

3.4.2 Ponieważ model matematyczny pomiaru może być niepełny, a wszystkie odpowiednie wielkości w modelu mogą się zmieniać w praktycznie możliwym osiągalnym zakresie, wyznaczanie niepewności może opierać się w jak największym stopniu na danych z obserwacji. Aby otrzymać wiarygodne oszacowania niepewności, należy, jeżeli tylko jest to możliwe, używać empirycznych modeli pomiaru opartych na długoterminowych danych ilościowych oraz stosować wzorce kontrolne i karty kontrolne, które mogą wskazywać, czy pomiar jest pod kontrolą statystyczną. Model matematyczny powinien być zawsze poprawiany, gdy zaobserwowane dane, włączając w to wyniki niezależnego wyznaczania tego samego menzurandu, wskazują na niekompletność modelu. Dobrze zaprojektowany eksperyment może znacznie ułatwić wiarygodne wyznaczanie niepewności i jest ważną częścią sztuki mierzenia.

3.4.3 W celu podjęcia decyzji o poprawności działania systemu pomiarowego, porównuje się często eksperymentalnie obserwowaną zmienność jego wartości wyjściowych, wyrażoną przez zaobserwowane odchylenie standardowe, z przewidywanym odchyleniem standardowym, otrzymanym przez składanie różnych składowych niepewności charakteryzujących pomiar. W takich przypadkach bierze się pod uwagę tylko te składowe (bez względu na to, czy są wyznaczone metodą typu A, czy metodą typu B), które mogłyby składać się na eksperymentalnie obserwowaną zmienność tych wartości wyjściowych.

UWAGA Taka analiza może być ułatwiona przez zgromadzenie tych składowych, które powodują tę zmienność i tych, które zmienności takiej nie powodują, w dwóch osobnych odpowiednio oznaczonych grupach.

3.4.4 W niektórych przypadkach niepewność poprawki, związana z oddziaływaniem systematycznym, nie musi być uwzględniona przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru. Chociaż niepewność ta była wyznaczona, można ją pominąć, jeżeli jej wkład do niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru jest nieznaczny. Jeżeli wartość samej poprawki jest nieznaczna względem niepewności standardowej złożonej, ona także może być pominięta.

3.4.5 W praktyce często się zdarza, szczególnie w dziedzinie metrologii prawnej, że urządzenie jest badane poprzez porównanie z wzorcem pomiarowym, a niepewności związane z wzorcem oraz z procedurą porównania są pomijalne w stosunku do wymaganej dokładności badania. Przykładem może być zastosowanie zestawu dobrze wywzorcowanych odważników wzorcowych do badania dokładności pomiarów w skali komercyjnej. W takich przypadkach, ponieważ składowe niepewności związanej z wzorcem

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

i porównywaniem są pomijalnie małe, pomiar może być traktowany jako wyznaczanie błędu badanego urządzenia (Patrz także F.2.4.2).

3.4.6 Estymata wartości menzurandu, dana przez wynik pomiaru, może być niekiedy wyrażona przez odniesienie do przyjętej wartości wzorca pomiarowego, a nie w odpowiednich jednostkach Międzynarodowego Układu Jednostek Miar SI. W takich przypadkach wartość niepewności wyniku pomiaru może być znacznie mniejsza niż wtedy, gdyby wynik był wyrażony w odpowiedniej jednostce miary. (Faktycznie menzurand został tu zdefiniowany jako stosunek wartości wielkości do przyjętej wartości wzorca).

PRZYKŁAD Wysokiej jakości wzorzec napięcia Zenera jest wzorcowany przez porównanie z wzorcem odniesienia wykorzystującym zjawisko Josephsona, opartym na wartości poprawnej stałej Josephsona, zalecanej do międzynarodowego stosowania przez CIPM. Względna niepewność standardowa złożona $u_c(V_S)/V_S$ (patrz 5.1.6) wzorcowanego napięcia V_S wzorca Zenera wynosi 2×10^{-8}, gdy V_S jest podawane poprzez wartość poprawną napięcia wzorca Josephsona, ale wynosi 4×10^{-7}, gdy V_S jest podawane w jednostkach SI napięcia, czyli w woltach (V). Jest to spowodowane dodatkową niepewnością związaną z wartością stałej Josephsona w układzie SI.

3.4.7 Pomyłki w zapisie i analizie danych mogą wprowadzić znaczny, lecz nieznany błąd do wyniku pomiaru. Duże pomyłki można zwykle zidentyfikować przez szczegółowe przejrzenie danych. Małe pomyłki mogą być maskowane przez przypadkowe zmiany lub nawet być z nimi identyfikowane. Miary niepewności nie uwzględniają tego rodzaju pomyłek.

3.4.8 Chociaż *Przewodnik* stanowi ramy oceny niepewności, to nie może zastąpić krytycznego myślenia, uczciwości intelektualnej i zawodowych umiejętności. Wyznaczanie niepewności nie jest ani zadaniem rutynowym, ani zadaniem czysto matematycznym. Zależy ono od szczegółowej wiedzy o naturze menzurandu i pomiaru. Dlatego też jakość i użyteczność niepewności podawanej z wynikiem pomiaru w zasadniczy sposób zależy od zrozumienia, krytycznej analizy i rzetelności tych, którzy uczestniczą w ocenianiu jej wartości.

4 Wyznaczanie niepewności standardowej

Dodatkowe wskazówki, głównie natury praktycznej, co do sposobu wyznaczania składowych niepewności, można znaleźć w aneksie F.

4.1 Modelowanie pomiaru

4.1.1 W większości przypadków menzurand Y nie jest mierzony wprost, ale jest określany z N innych wielkości $X_1, X_2, ..., X_N$ za pomocą zależności funkcyjnej f

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1}$$

UWAGA 1 Dla uproszczenia zapisu, w *Przewodniku* ten sam symbol będzie używany do oznaczenia wielkości fizycznej (menzurandu) i zmiennej losowej (patrz 4.2.1), która reprezentuje możliwy wynik obserwacji tej wielkości. Gdy stwierdza się, że X_i ma pewien określony rozkład prawdopodobieństwa, symbol ten jest użyty w znaczeniu zmiennej losowej. Zakłada się, że wielkość fizyczna jako taka może być scharakteryzowana w zasadzie przez pojedynczą wartość (patrz 1.2 i 3.1.3).

UWAGA 2 W seriach obserwacji, *k*-ta obserwowana wartość X_i będzie oznaczona przez $X_{i,k}$. Stąd jeśli R oznacza rezystancję opornika, to *k*-ta zaobserwowana wartość rezystancji będzie oznaczona przez R_k.

UWAGA 3 Estymata X_i (ściśle mówiąc wartości oczekiwanej X_i) będzie oznaczana przez x_i.

PRZYKŁAD Jeśli do zacisków opornika o rezystancji zależnej od temperatury, który ma rezystancję R_0 w określonej temperaturze t_0 i liniowy współczynnik temperaturowy rezystancji α, przyłożone jest napięcie V, to moc P (menzurand) rozpraszana przez opornik w temperaturze t zależy od V, R_0 i t zgodnie z wzorem

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2 \big/ \{R_0[1 + \alpha(t - t_0)]\}$$

UWAGA Inne metody pomiaru P mogą być modelowane za pomocą innych zależności matematycznych.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

4.1.2 *Wielkości wejściowe* $X_1, X_2, ..., X_N$, od których zależy *wielkość wyjściowa* Y mogą być same potraktowane jako menzurandy i mogą zależeć od innych wielkości, włączając w to poprawki i współczynniki poprawkowe dla oddziaływań systematycznych, co prowadzi do skomplikowanej zależności funkcyjnej f, nie zawsze zapisanej w sposób jawny. Dalej, funkcja f może być określona eksperymentalnie (patrz 5.1.4) albo istnieć tylko jako algorytm obliczenia numerycznego. Funkcja f, o której mowa w *Przewodniku*, powinna być interpretowana w szerszym sensie, w szczególności jako funkcja, która zawiera wszystkie wielkości, włączając poprawki i współczynniki poprawkowe, które mogą wnosić znaczące składowe niepewności do wyniku pomiaru.

Jeżeli z danych wynika, że funkcja f nie modeluje pomiaru w stopniu takim, jaki wynika z wymaganej dokładności wyniku pomiaru, to w celu wyeliminowania tej nieadekwatności do funkcji f należy włączyć dodatkowe wielkości wejściowe (patrz 3.4.2). Może to wymagać wprowadzenia dodatkowych wielkości wejściowych wyrażających niepełną znajomość zjawiska wpływającego na menzurand. W przykładzie z 4.1.1 dodatkowe wielkości wejściowe mogłyby być potrzebne, w celu uwzględnienia możliwej nieliniowości zależności rezystancji od temperatury, spowodowanej nierównomiernym rozkładem temperatury w oporniku lub w celu uwzględnienia możliwej zależności rezystancji od ciśnienia barometrycznego.

UWAGA Równanie (1) może być tak elementarne jak w postaci: $Y = X_1 - X_2$. Równanie to modeluje, na przykład, porównywanie dwóch wielkości X tego samego rodzaju.

4.1.3 Zbiór wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$ można podzielić na:

- wielkości, których wartości i *niepewności* są bezpośrednio określone poprzez aktualny pomiar. Te wartości i niepewności można otrzymać np. z pojedynczej obserwacji, powtórzonych obserwacji lub oceny opartej na doświadczeniu. Mogą one pociągać za sobą określenie poprawek dla odczytów przyrządów i poprawek od wielkości wpływających, takich jak temperatura otoczenia, ciśnienie atmosferyczne i wilgotność,
- wielkości, których wartości i *niepewności* zostały wniesione do pomiaru z zewnętrznych źródeł, takich jak wielkości związane z kalibrowanymi wzorcami, certyfikowanymi materiałami odniesienia i danymi odniesienia zaczerpniętymi z podręczników.

4.1.4 Estymatę menzurandu Y, oznaczoną przez y, wyznacza się z równania (1) dla *estymat wejściowych* $x_1, x_2, ..., x_N$ wartości N wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$. Stąd *estymata wyjściowa* y, będąca wynikiem pomiaru, jest dana jako

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{2}$$

UWAGA W niektórych przypadkach oszacowanie y można otrzymać ze wzoru

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{N,k})$$

Oznacza to, że y jest średnią arytmetyczną (patrz 4.2.1) n niezależnych wartości Y_k zmiennej Y, każda wartość ma taką samą niepewność i każda opiera się na pełnym zbiorze zaobserwowanych wartości N wielkości wejściowych X_i otrzymanych w tym samym czasie. Jeżeli f jest nieliniową funkcją wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$, ten sposób uśredniania należy przedkładać nad liczenie średniej jako $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$ gdzie

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

to średnie arytmetyczne pojedynczych obserwacji $X_{i,k}$. Obydwa sposoby uśredniania dają jednakowe wyniki, jeżeli f jest funkcją liniową wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$ (patrz H.2 i H.4).

4.1.5 Oszacowane odchylenie standardowe związane z estymatą wielkości wyjściowej lub wynikiem pomiaru y, nazywane *niepewnością standardową złożoną* i oznaczane przez $u_c(y)$, jest określone na podstawie oszacowanych odchyleń standardowych estymat wielkości wejściowych x_i, nazywanych *niepewnościami standardowymi* i oznaczanymi przez $u(x_i)$ (patrz 3.3.5 i 3.3.6).

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

4.1.6 Każda estymata wielkości wejściowej x_i i związana z nią niepewność standardowa $u(x_i)$ są otrzymane na podstawie rozkładu możliwych wartości wielkości wejściowej X_i. Ten rozkład prawdopodobieństwa może być oparty na częstości, to jest na seriach obserwacji $X_{i,k}$ dla X_i, albo może to być rozkład dany *a priori*. Metoda typu A wyznaczania składowych niepewności standardowej opiera się na rozkładach częstości, podczas gdy metoda typu B wyznaczania składowych niepewności opiera się na rozkładach danych *a priori*. Trzeba zauważyć, że w obu przypadkach rozkłady są modelami stosowanymi do oddania stanu naszej wiedzy.

4.2 Metoda typu A wyznaczania niepewności standardowej

4.2.1 W większości przypadków, najlepszym osiągalnym oszacowaniem wartości oczekiwanej μ_q wielkości q, która zmienia się losowo [**zmienna losowa** (C.2.2)] i dla której dokonano n niezależnych obserwacji q_k w warunkach powtarzalności pomiaru (patrz B.2.15) jest **średnia arytmetyczna**, czyli **wartość przeciętna** $\bar{q}$ (C.2.19) n obserwacji

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Zatem dla wielkości wejściowej X_i oszacowanej na podstawie n niezależnych powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$ średnia arytmetyczna $\bar{X}_i$ otrzymana z równania (3) jest stosowana jako estymata wielkości wejściowej x_i w równaniu (2), z którego wyznacza się wynik pomiaru y, czyli $x_i = \bar{X}_i$. Estymaty wielkości wejściowych, które nie zostały wyznaczone z powtórzonych obserwacji, muszą być wyznaczane innymi metodami, takimi jak wymienione przy omawianiu drugiej kategorii wielkości wejściowych w 4.1.3.

4.2.2 Poszczególne obserwacje q_k różnią się co do wartości z powodu przypadkowych zmian wielkości wejściowych lub oddziaływań przypadkowych (patrz 3.2.2). Wariancja eksperymentalna obserwacji, estymująca wariancję σ^2 rozkładu prawdopodobieństwa wielkości q, jest dana wzorem

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}[q_k - \bar{q}]^2 \tag{4}$$

Estymata wariancji i jej dodatni pierwiastek kwadratowy $s(q_k)$, nazywany **odchyleniem standardowym eksperymentalnym** (B.2.17), charakteryzuje zmienność obserwowanych wartości q_k lub ściślej ich rozrzut wokół średniej $\bar{q}$.

4.2.3 Najlepszą estymatą wariancji średniej arytmetycznej $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ jest

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

Wariancja eksperymentalna średniej $s^2(\bar{q})$ i **odchylenie standardowe eksperymentalne średniej** $s(\bar{q})$ (B.2.17, uwaga 2), równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu z $s^2(\bar{q})$, określają liczbowo jak dobrze $\bar{q}$ estymuje wartość oczekiwaną μ_q zmiennej q i każde z nich może być użyte jako miara niepewności $\bar{q}$.

Zatem dla wielkości wejściowej X_i, określonej z n niezależnych powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$, niepewność standardowa $u(x_i)$ jej estymaty $x_i = \bar{X}_i$ wynosi $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$, gdzie $s^2(\bar{X}_i)$ zostało obliczone zgodnie z równaniem (5). Umownie $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ i $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ są czasami nazywane *wariancją typu A* i *niepewnością standardową typu A*, odpowiednio.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA 1 Liczba obserwacji n powinna być na tyle duża, aby zapewnić to, że $\bar{q}$ jest wiarygodnym oszacowaniem wartości oczekiwanej μ_q zmiennej losowej q oraz to, że $s^2(\bar{q})$ jest wiarygodnym oszacowaniem wariancji $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ (patrz uwaga w 4.3.2). Różnice pomiędzy $s^2(\bar{q})$ i $\sigma^2(\bar{q})$ powinno się brać pod uwagę przy konstruowaniu przedziałów ufności (patrz 6.2.2). Gdy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej q jest rozkładem normalnym (patrz 4.3.4) różnicę tę uwzględnia się stosując rozkład t-Studenta (patrz G.3.2).

UWAGA 2 Chociaż wariancja $s^2(\bar{q})$ jest podstawowym parametrem rozkładu, odchylenie standardowe $s(\bar{q})$ jest wygodniejsze w praktyce, ponieważ ma ten sam wymiar co q i bardziej uchwytną wartość aniżeli wariancja.

4.2.4 Dla dobrze określonego pomiaru prowadzonego pod kontrolą statystyczną, może być znana połączona estymata wariancji s_p^2 (albo połączone odchylenie standardowe eksperymentalne s_p), charakteryzująca pomiar. W przypadku, gdy wartość menzurandu q jest określana z n niezależnych obserwacji, wariancję eksperymentalną średniej arytmetycznej $\bar{q}$ z n obserwacji lepiej jest szacować z wyrażenia s_p^2/n niż z $s^2(q_k)/n$ i stąd niepewność standardowa dana jest $u = s_\mathrm{p}/\sqrt{n}$ (patrz także uwaga do H.3.6).

4.2.5 Często estymatę x_i wielkości wejściowej X_i wyznacza się z krzywej, która została dopasowana do danych eksperymentalnych metodą najmniejszych kwadratów. Oszacowane wariancje i wynikające z nich odchylenia standardowe parametrów charakteryzujących dopasowaną krzywą oraz wartości przewidywanych punktów na tej krzywej można obliczać za pomocą dobrze znanych procedur statystycznych (patrz H.3 i pozycja [8] Bibliografii).

4.2.6 Gdy sporządza się dokumentację wyznaczania składowych niepewności metodą typu A, należy zawsze podawać liczbę stopni swobody (C.2.31) ν_i dla poszczególnych $u(x_i)$ (patrz G.3), równą $n-1$ w prostym przypadku $x_i = \bar{X}_i$ i $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ obliczanych na podstawie n niezależnych obserwacji jak w 4.2.1 i 4.2.3.

4.2.7 Jeśli przypadkowe zmiany obserwacji wielkości wejściowej są skorelowane, na przykład w czasie, średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe eksperymentalne średniej, określone w 4.2.1 i 4.2.3, mogą być nieodpowiednimi **estymatorami** (C.2.25) żądanych **statystyk** (C.2.23). W takich przypadkach obserwacje należy analizować metodami statystycznymi specjalnie przeznaczonymi do analizy serii skorelowanych, losowo zmiennych obserwacji.

UWAGA Takie specjalizowane metody są stosowane do analizy pomiarów wzorców częstotliwości. Może się jednak zdarzyć, że przy przejściu z pomiarów krótkoterminowych do pomiarów długoterminowych innych wielkości metrologicznych, założenie o nieskorelowanych zmianach przypadkowych traci swoją moc i owe specjalizowane metody mogą być równie dobrze zastosowane do analizy tych pomiarów. (Patrz, na przykład, pozycja [9] Bibliografii, zawierająca szczegółową dyskusję wariancji Allana).

4.2.8 Celem rozważań punktów od 4.1.2 do 4.2.7 nie było wyczerpanie całości problematyki wyznaczania niepewności standardowej metodą typu A. Istnieje wiele sytuacji, często złożonych, które można analizować metodami statystycznymi. Przykładem jest tu zaplanowanie procesu wzorcowania, z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów, którego celem jest określenie niepewności wynikających zarówno z krótko- jak i długoterminowych zmian przypadkowych uzyskanych w porównaniach określonych wzorców materialnych o nieznanych parametrach, takich jak płytki wzorcowe czy odważniki, z wzorcami odniesienia o znanych wartościach. W takich stosunkowo prostych sytuacjach pomiarowych składowe niepewności można często określić za pomocą analizy statystycznej danych, otrzymanych z planów złożonych z pogrupowanych sekwencji pomiarów wartości menzurandu dla pewnej liczby różnych wartości wielkości, od których on zależy. Jest to tak zwana analiza wariancji (patrz H.5).

UWAGA Na niższych poziomach łańcucha wzorcowania, gdzie często zakłada się, że wzorce odniesienia są znane dokładnie, ponieważ były one wzorcowane w laboratoriach za pomocą wzorców państwowych lub pierwotnych, niepewność wyniku wzorcowania może być pojedynczą niepewnością standardową typu A wyznaczaną na podstawie połączonego odchylenia standardowego eksperymentalnego charakteryzującego pomiar.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

4.3 Metoda typu B wyznaczania niepewności standardowej

4.3.1 Dla estymaty x_i wielkości wejściowej X_i, nie otrzymanej z powtarzanych obserwacji, oszacowaną wariancję $u^2(x_i)$ albo niepewność standardową $u(x_i)$ wyznacza się na drodze analizy naukowej opartej na wszystkich dostępnych informacjach o możliwej zmienności X_i. Zestaw tych informacji może obejmować:

- poprzednie dane pomiarowe,
- posiadane doświadczenie wraz z ogólną znajomością zjawisk i właściwości odpowiednich materiałów i przyrządów,
- specyfikacje wytwórców,
- dane uzyskane z wzorcowania i certyfikacji,
- niepewności przypisane danym odniesienia zaczerpniętym z podręczników.

Umownie $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$, wyznaczone w ten sposób, są czasami nazywane *wariancją typu B* i *niepewnością standardową typu B*, odpowiednio.

UWAGA Gdy x_i jest otrzymane z rozkładu danego *a priori*, jego wariancja powinna być zapisywana jako $u^2(X_i)$, ale dla prostoty w *Przewodniku* stosowane są symbole $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$.

4.3.2 Właściwe zastosowanie zestawu dostępnych informacji na temat wyznaczania niepewności standardowej metodą typu B wymaga intuicji opartej na posiadanym doświadczeniu i ogólnej wiedzy oraz jest umiejętnością zawodową, którą można nabyć wraz z praktyką. Należy zauważyć, że wyznaczanie niepewności standardowej metodą typu B może być równie wiarygodne, jak wyznaczanie metodą typu A, szczególnie w takiej sytuacji, kiedy wyznaczanie metodą typu A jest oparte na stosunkowo małej liczbie niezależnych obserwacji.

UWAGA Jeśli rozkład prawdopodobieństwa q z uwagi 1 do 4.2.3 jest normalny, to $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, czyli stosunek odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej $s(\bar{q})$ do odchylenia standardowego $\sigma(\bar{q})$, wynosi w przybliżeniu $[2(n-1)]^{-1/2}$. Przyjmując $\sigma[s(\bar{q})]$ jako niepewność $s(\bar{q})$, otrzymuje się, że dla $n = 10$ obserwacji względna niepewność $s(\bar{q})$ wynosi 24 %, a dla $n = 50$ wynosi 10 %. (Inne wartości są podane w tabeli E.1 w dodatku E).

4.3.3 Jeśli estymata x_i jest wzięta z dokumentacji wytwórcy, świadectwa wzorcowania, podręcznika czy innego źródła i jego niepewność jest dana jako pewna wielokrotność odchylenia standardowego, to niepewność standardowa $u(x_i)$ jest ilorazem podawanej wartości przez tą wielokrotność, a oszacowana wariancja $u^2(x_i)$ jest kwadratem tego ilorazu.

PRZYKŁAD Świadectwo wzorcowania podaje, że masa m_S odważnika o nominalnej wartości jednego kilograma wynosi 1 000,000 325 g i że "niepewność tej wartości wynosi 240 μg na poziomie trzech odchyleń standardowych". Niepewność standardowa odważnika $u(m_S)$ wynosi (240 μg)/3 = 80 μg, odpowiada to względnej niepewności standardowej $u(m_S)/m_S$ równej 80×10^{-9} (patrz 5.1.6). Oszacowana wariancja $u^2(m_S)$ wynosi $(80\ \mu g)^2 = 6{,}4 \times 10^{-9}\ g^2$.

UWAGA W wielu przypadkach podawanych jest mało informacji lub nie ma ich wcale, odnośnie poszczególnych składowych, z których otrzymano podawaną niepewność. Ogólnie biorąc, nie jest to istotne przy wyrażaniu niepewności zgodnie z zaleceniami *Przewodnika* wtedy, gdy przy obliczaniu niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru wszystkie niepewności standardowe są traktowane w ten sam sposób (patrz rozdział 5).

4.3.4 Podawana niepewność x_i niekoniecznie musi być dana jako wielokrotność odchylenia standardowego, tak jak w 4.3.3. Zamiast tego, może być ona podana jako przedział mający 90, 95, czy 99 procentowy poziom ufności (patrz 6.2.2). O ile nie jest powiedziane inaczej, można założyć, że do obliczenia podanej niepewności zastosowano **rozkład normalny** (C.2.14) i można wyznaczyć niepewność standardową dla x_i poprzez podzielenie podawanej niepewności przez odpowiedni współczynnik wynikający z rozkładu normalnego. Współczynniki odpowiadające podanym wyżej trzem poziomom ufności mają wartości odpowiednio 1,64; 1,96 i 2,58 (patrz także tabela G.1 w aneksie G).

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA Może zdarzyć się, że nie ma potrzeby przyjmowania takiego założenia, jeżeli niepewność została podana zgodnie z zaleceniami *Przewodnika* dotyczącymi wyrażania niepewności, które kładą nacisk na podawanie wartości przyjętego współczynnika rozszerzenia (patrz 7.2.3).

PRZYKŁAD Świadectwo wzorcowania stwierdza, że rezystancja R_S opornika wzorcowego o wartości nominalnej dziesięć omów wynosi $10{,}000\ 742\ \Omega \pm 129\ \mu\Omega$ w temperaturze 23 °C i że "podana niepewność 129 μΩ określa przedział o poziomie ufności 99 %". Niepewność standardowa opornika można przyjąć jako $u(R_S) = (129\ \mu\Omega)/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$, co daje względną niepewność standardową $u(R_S)/R_S$ wynoszącą $5{,}0 \times 10^{-6}$ (patrz 5.1.6). Oszacowana wariancja wynosi $u^2(R_S) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

4.3.5 Rozważmy przypadek, gdy opierając się na dostępnych informacjach, można stwierdzić, że "jest pół na pół szansy na to, że wartość wielkości wejściowej X_i, leży w przedziale od a_- do a_+" (innymi słowy, prawdopodobieństwo tego, że X_i leży wewnątrz tego przedziału wynosi 0,5 % lub 50 %). Jeśli można przyjąć, że rozkład możliwych wartości X_i jest w przybliżeniu normalny, wtedy za najlepszą estymatę x_i dla X_i można przyjąć środek przedziału. Dalej, jeśli połowa szerokości tego przedziału jest oznaczona przez $a = (a_+ - a_-)/2$, to można przyjąć $u(x_i) = 1{,}48a$, ponieważ dla rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ przedział $\mu \pm \sigma/1{,}48$ obejmuje w przybliżeniu 50 % rozkładu.

PRZYKŁAD Mechanik określający wymiary pewnej części jakiegoś urządzenia szacuje, że jej długość, z prawdopodobieństwem 0,5 leży w przedziale 10,07 mm do 10,15 mm i podaje, że $l = (10{,}11 \pm 0{,}04)$ mm rozumując, że ± 0,04 mm określa przedział o 50 % poziomie ufności. Wtedy $a = 0{,}04$ mm i jeśli przyjmie się rozkład normalny dla możliwych wartości l, niepewność standardowa długości wynosi $u(l) = 1{,}48 \times 0{,}04\ \text{mm} \approx 0{,}06\ \text{mm}$, a oszacowana wariancja wynosi $u^2(l) = (1{,}48 \times 0{,}04\ \text{mm})^2 = 3{,}5 \times 10^{-3}\ \text{mm}^2$.

4.3.6 Rozważmy przypadek podobny do poprzedniego (4.3.5), ale taki, gdzie opierając się na dostępnej informacji, można stwierdzić, że "jest około dwie na trzy szanse, że wartość X_i leży w przedziale od a_- do a_+" (innymi słowami, prawdopodobieństwo, że X_i leży wewnątrz tego przedziału wynosi około 0,67). Można wtedy przyjąć $u(x_i) = a$, ponieważ dla rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ przedział $\mu \pm \sigma$ obejmuje około 68,3 % rozkładu.

UWAGA Można otrzymać dokładniejszą wartość $u(x_i)$, przyjmując dokładniejszą wartość współczynnika rozszerzenia, który dla rozkładu normalnego dla poziomu ufności $p = 2/3$ wynosi 0,96742, wówczas $u(x_i) = a/0{,}967\ 42 = 1{,}033a$.

4.3.7 W innych przypadkach możliwe jest tylko oszacowanie granic (dolna i górna granica) dla X_i, a w szczególności stwierdzenie, że "prawdopodobieństwo tego, że wartość X_i leży wewnątrz przedziału od a_- do a_+ dla wszystkich faktycznych zdarzeń jest równe jeden oraz że prawdopodobieństwo tego, że X_i leży na zewnątrz tego przedziału, jest równe zeru". Jeśli brak jest jakichkolwiek szczegółowych informacji o możliwych wartościach X_i wewnątrz tego przedziału, można tylko przyjąć, że jest jednakowo prawdopodobnym, że X_i leży gdziekolwiek wewnątrz niego (rozkład równomierny lub prostokątny możliwych wartości – patrz 4.4.5 i Rys. 2a). Wtedy x_i, wartość oczekiwana X_i, jest punktem środkowym przedziału $x_i = (a_- + a_+)/2$, a związana z nią wariancja wynosi

$$u^2(x_i) = \left(a_+ - a_-\right)^2 / 12 \tag{6}$$

Jeśli różnica pomiędzy granicami $a_+ - a_-$ będzie oznaczona przez $2a$, to równanie (6) przyjmie postać

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{7}$$

UWAGA Gdy składowa niepewności określona w ten sposób ma znaczący udział w niepewności wyniku pomiaru, jest rzeczą rozsądną szukanie dodatkowych danych umożliwiających dalsze jej wyznaczanie.

PRZYKŁAD 1 Podręcznik podaje wartość współczynnika rozszerzalności liniowej czystej miedzi w 20 °C $\alpha_{20}(\text{Cu})$ jako równą $16{,}52 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$ i po prostu stwierdza, że "błąd tej wartości nie powinien przekraczać $0{,}40 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$". Ta ograniczona informacja pozwala wysnuć wniosek, iż nie jest nieuzasadnione założenie, że przyjęcie przez $\alpha_{20}(\text{Cu})$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

którejkolwiek wartości leżącej wewnątrz przedziału od $16{,}12 \times 10^{-6}$ °C^{-1} do $16{,}92 \times 10^{-6}$ °C^{-1} jest jednakowo prawdopodobne i, że jest bardzo mało prawdopodobne, aby $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ leżało na zewnątrz tego przedziału. Wariancja symetrycznego rozkładu prostokątnego możliwych wartości $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ o szerokości połówkowej równej $a = 0{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1} jest więc, na podstawie równania (7), równa $u^2(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2/3 = 53{,}3 \times 10^{-15}\ °\mathrm{C}^{-2}$, a odchylenie standardowe równe $u(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}23 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$.

PRZYKŁAD 2 W specyfikacji wytwórcy woltomierza cyfrowego stwierdza się, że "w okresie pomiędzy jednym a dwoma latami po wzorcowaniu przyrządu, jego dokładność na zakresie 1 V wynosi 14×10^{-6} razy wartość odczytu plus 2×10^{-6} razy wartość zakresu". Przypuśćmy, że przyrząd jest stosowany w 20 miesięcy po wzorcowaniu do pomiaru napięcia na zakresie 1 V i że średnia arytmetyczna pewnej liczby niezależnych powtórzonych obserwacji jest równa $\bar{V}$ = 0,928 571 V, zaś niepewność standardowa typu A wynosi $u(\bar{V})$ = 12 µV. Niepewność standardową związaną ze specyfikacją wytwórcy można wyznaczyć metodą typu B zakładając, że podana dokładność określa symetryczne granice wartości $\Delta\bar{V}$ poprawki addytywnej $\bar{V}$, o wartości oczekiwanej równej zeru i jednakowym prawdopodobieństwie przyjęcia przez nią którejkolwiek z wartości leżących w obrębie tych granic. Połówkowa szerokość a symetrycznego rozkładu prostokątnego możliwych wartości $\Delta\bar{V}$ wynosi $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0{,}928\ 571\ \mathrm{V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1\ \mathrm{V}) = 15\ \mu\mathrm{V}$, a z równania (7) $u^2(\Delta\bar{V}) = 75\ \mu\mathrm{V}^2$ i $u(\Delta\bar{V}) = 8{,}7\ \mu\mathrm{V}$. Estymata wartości menzurandu V, dla prostoty oznaczona tym samym symbolem V, wynosi więc $V = \bar{V} + \Delta\bar{V}$ = 0,928 571 V. Niepewność standardową złożoną tej estymaty można otrzymać przez złożenie niepewności standardowej $\bar{V}$ równej 12 µV, wyznaczonej metodą typu A, z niepewnością standardową $\Delta\bar{V}$ równą 8,7 µV, wyznaczonej metodą typu B. Ogólna metoda składania niepewności standardowych jest podana w rozdziale 5, a niniejszy przykład jest dalej rozważany w 5.1.5.

4.3.8 W 4.3.7 górna i dolna granica a_+ i a_- dla wielkości wejściowej X_i nie muszą być symetryczne względem jej najlepszej estymaty x_i; bardziej szczegółowo, jeśli dolną i górną granicę można przedstawić w postaci $a_- = x_i - b_-$ i $a_+ = x_i - b_+$, wtedy $b_- \neq b_+$. Ponieważ w tym przypadku x_i (przyjmuje się, że jest wartością oczekiwaną X_i) nie leży w środku przedziału od a_- do a_+, to rozkład prawdopodobieństwa X_i nie może być jednostajny w całym przedziale. Jednakże, możemy nie mieć dostatecznej ilości dostępnych informacji, aby wybrać odpowiedni rozkład, a różne modele będą prowadzić do różnych wyrażeń na wariancję. W przypadku braku takich informacji najprostszym przybliżeniem jest

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \tag{8}$$

które jest wariancją rozkładu prostokątnego o całkowitej szerokości wynoszącej $b_+ + b_-$. (Rozkłady asymetryczne są także rozważane w F.2.4.4 i G.5.3).

PRZYKŁAD W Przykładzie 1 z 4.3.7 wartość współczynnika podano na podstawie podręcznika jako $\alpha_{20}(\mathrm{Cu}) = 16{,}52 \times 10^{-6}$ °C^{-1} i stwierdzono dalej, że "najmniejsza możliwa jego wartość wynosi $16{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1}, a największa $16{,}92 \times 10^{-6}$ °C^{-1}", stąd $b_- = 0{,}12 \times 10^{-6}$ °C^{-1}, $b_+ = 0{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1}, a z równania (8) $u(\alpha_{20}) = 0{,}15 \times 10^{-6}$ °C^{-1}.

UWAGA 1 W wielu sytuacjach pomiarowych, kiedy granice są symetryczne, może być celowe skorygowanie estymaty x_i poprawką $(b_+ - b_-)/2$, tak aby nowa estymata $x_i' = (a_+ + a_-)/2$ odpowiadała środkowi przedziału wytyczonego tymi granicami. Sprowadza to tę sytuację do przypadku z 4.3.7, z nowymi wartościami $b_+' = b_-' = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

UWAGA 2 Opierając się na zasadzie maksimum entropii, można wykazać, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa w przypadku asymetrycznym powinna mieć postać $p(X_i) = A\exp\left[-\lambda(X_i - x_i)\right]$ przy $A = \left[b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)\right]^{-1}$ i $\lambda = \left\{\exp\left[\lambda(b_- + b_+)\right] - 1\right\} / \left\{b_- \exp\left[\lambda(b_- + b_+)\right] + b_+\right\}$. Prowadzi to do wariancji $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$ dla $b_+ > b_-, \lambda > 0$ i $b_+ < b_-, \lambda < 0$.

4.3.9 W 4.3.7 wobec braku szczegółowych informacji o możliwych wartościach X_i w obrębie szacowanych granic od a_- do a_+, można tylko założyć, że przyjęcie przez X_i którejkolwiek wartości z przedziału wytyczonego tymi granicami jest jednakowo prawdopodobne, zaś prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza tego przedziału jest zerowe. Takie skokowe nieciągłości funkcji rozkładu prawdopodobieństwa są często

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

nieuzasadnione fizycznie. W wielu przypadkach jest bardziej realistycznym oczekiwać, że wartości w pobliżu granic są mniej prawdopodobne niż te, które leżą w pobliżu środka. Uzasadnione więc wydaje się zastąpienie symetrycznego rozkładu prostokątnego przez symetryczny rozkład trapezowy mający równe nachylenia ramion (trapez równoramienny), z podstawą dolną o szerokości $a_+ - a_- = 2a$ i z podstawą górną o szerokości $2a\beta$, gdzie $0 \le \beta \le 1$. Gdy $\beta \to 1$ rozkład trapezowy dąży do rozkładu prostokątnego (4.3.7), podczas gdy dla $\beta = 0$ jest rozkładem trójkątnym [patrz 4.4.6 i Rys. 2b]. Zakładając rozkład trapezowy X_i, wyznaczamy wartość oczekiwaną X_i jako $x_i = (a_- + a_+)/2$ i związaną z nią wariancję

$$u^2(x_i) = a^2(1+\beta)/6 \tag{9a}$$

która dla rozkładu trójkątnego $\beta = 0$ przyjmuje postać

$$u^2(x_i) = a^2/6 \tag{9b}$$

UWAGA 1 Dla rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ przedział $\mu \pm 3\sigma$ obejmuje w przybliżeniu 99,73 % rozkładu. Stąd, jeśli górna i dolna granice a_+ i a_- określają granice 99,73 procentowe, nie zaś 100 procentowe, a o X_i można założyć, że ma w przybliżeniu raczej rozkład normalny, niż że brakuje informacji o jego rozkładzie w obrębie granic, tak jak w 4.3.7, to $u^2(x_i) = a^2/9$. Dla porównania wariancja symetrycznego rozkładu prostokątnego o szerokości połówkowej a wynosi $a^2/3$ [równanie (7)], a wariancja symetrycznego rozkładu trójkątnego o szerokości połówkowej a wynosi $a^2/6$ [równanie (9b)]. Wartości wariancji dla tych trzech rozkładów są zaskakująco podobne z punktu widzenia dużych różnic w ilości informacji wymaganych do ich uzasadnienia.

UWAGA 2 Rozkład trapezowy jest równoważny splotowi dwóch rozkładów prostokątnych [10]. Jeden z nich ma szerokość połówkową równą średniej szerokości połówkowej trapezu $a_1 = a(1+\beta)/2$, a drugi ma szerokość połówkową równą średniej szerokości jednej z trójkątnych części trapezu $a_2 = a(1-\beta)/2$. Wariancja rozkładu wynosi $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. Spleciony rozkład może być interpretowany jako rozkład prostokątny, którego szerokość $2a_1$ ma niepewność reprezentowaną przez rozkład prostokątny o szerokości $2a_2$ i wyraża fakt, że granice wielkości wejściowej nie są dokładnie znane. Ale nawet jeśli a_2 jest na tyle duże, że stanowi 30 % a_1, u przewyższa $a_1/\sqrt{3}$ mniej niż o 5 %.

4.3.10 Ważnym problemem jest unikanie "podwójnego liczenia" składowych niepewności. Jeśli składowa niepewności wynikająca z danego oddziaływania jest wyznaczona metodą typu B, to powinna być ona uwzględniona przy obliczaniu niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru jako składowa niezależna tylko w takim stopniu, w jakim oddziaływanie to nie wpływa na obserwowaną zmienność obserwacji. Wynika to z faktu, że niepewność powodowana częścią oddziaływania wpływającą na obserwowaną zmienność jest już uwzględniona w składowej niepewności otrzymanej poprzez analizę statystyczną obserwacji.

4.3.11 Dyskusja o metodzie typu B wyznaczania niepewności standardowej zawarta w punktach 4.3.5 do 4.3.9 służy sygnalizacji problemu. Wyznaczanie niepewności powinno opierać się na danych ilościowych w możliwie największym stopniu, co zaznaczono w 3.4.1 i 3.4.2.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

4.4 Graficzna interpretacja wyznaczania niepewności standardowej

4.4.1 Rys. 1 ilustruje oszacowanie wartości wielkości wejściowej X_i i wyznaczanie niepewności jej estymaty na podstawie nieznanego rozkładu możliwych zmierzonych wartości X_i lub rozkładu prawdopodobieństwa X_i, próbkowanego za pomocą powtarzanych obserwacji.

4.4.2 Załóżmy, że wielkością wejściową X_i na rys.1a jest temperatura t oraz że jej nieznany rozkład jest rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną μ_t = 100 °C i odchyleniem standardowym σ = 1,5 °C. Jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma więc postać (patrz C.2.14)

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_t}{\sigma}\right)^2\right]$$

UWAGA Definicja funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(z)$ nakłada na nią warunek $\int p(z)\mathrm{d}z = 1$.

4.4.3 Na rys. 1b pokazano histogram z n = 20 powtórzonych obserwacji t_k temperatury t, zakłada się, że są one próbą wziętą z rozkładu z rys. 1a. Aby otrzymać histogram 20 obserwacji, czyli próbek których wartości są podane w tablicy 1, pogrupowano w przedziałach o szerokości 1 °C. (Przygotowanie histogramu nie jest oczywiście wymagane do analizy statystycznej danych).

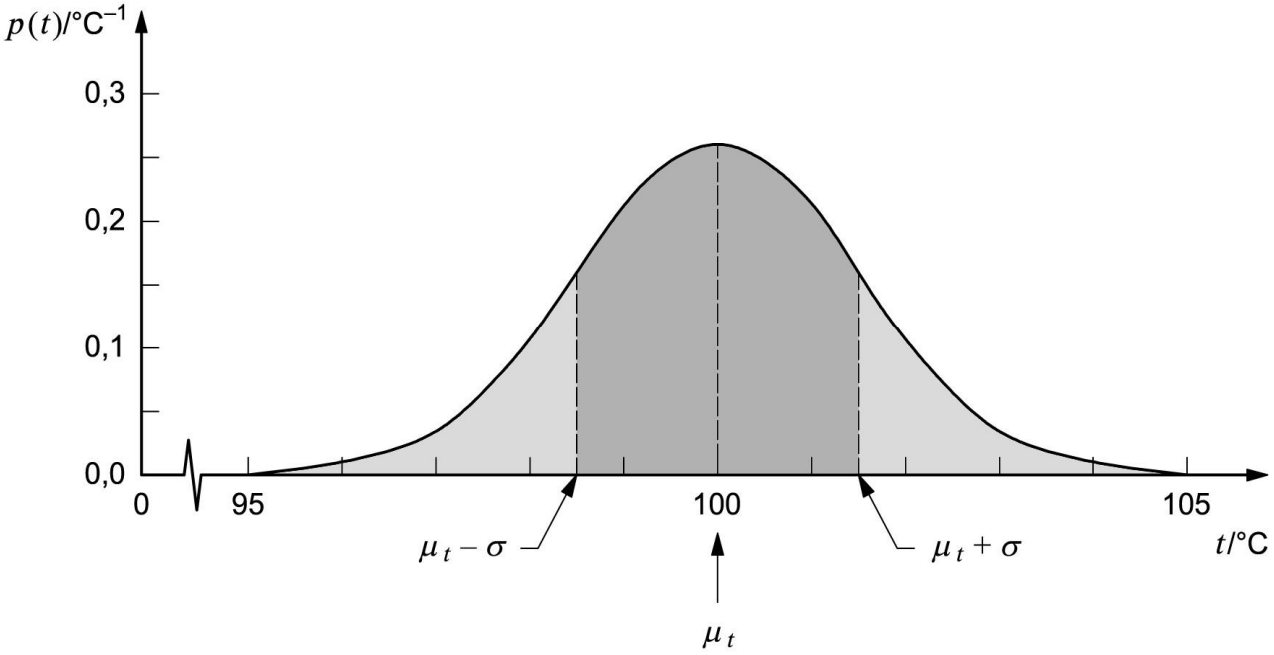
Tab. 1 – Dwadzieścia powtórzonych obserwacji temperatury *t* pogrupowanych w przedziałach o szerokości 1 °C

Przedział $t_1 \le t < t_2$		**Temperatura**
t_1 / °C	t_2 / °C	t / °C
94,5	95,5	-
95,5	96,5	-
96,5	97.5	96,90
97.5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	-
104,5	105,5	-

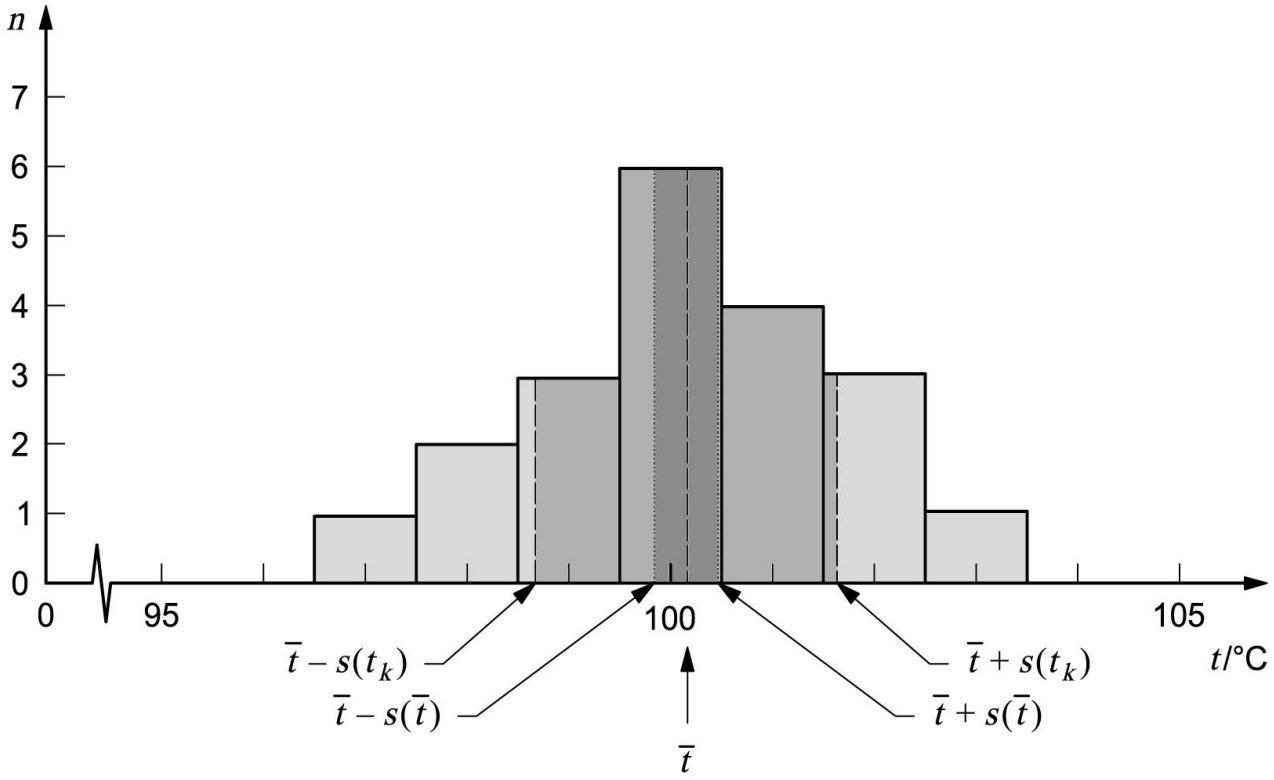
Średnia arytmetyczna lub przeciętna $\bar{t}$ z n = 20 obserwacji obliczona zgodnie z równaniem (3) wynosi $\bar{t}$ = 100,145 °C ≈ 100,14 °C. Zakłada się o niej, że jest najlepszą estymatą wartości oczekiwanej μ_t dla t opartą na uzyskanych danych. Odchylenie standardowe eksperymentalne $s(t_k)$, obliczone z równania (4), wynosi $s(t_k)$ = 1,489 °C ≈ 1,49 °C, a odchylenie standardowe eksperymentalne średniej $s(\bar{t})$ obliczone z równania (5), które jest niepewnością standardową $u(\bar{t})$ średniej $\bar{t}$ wynosi $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20}$ = 0,333 °C ≈ 0,33 °C (wskazane jest, aby dla dalszych obliczeń zachować wszystkie cyfry).

UWAGA Biorąc pod uwagę szeroko rozpowszechnione stosowanie elektronicznych termometrów cyfrowych o wysokiej rozdzielczości, dane z tabeli 1 nie wydają się możliwe do przyjęcia, to jednak są one ilustracją zagadnienia i niekoniecznie muszą być interpretowane jako wyniki rzeczywistych pomiarów.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone



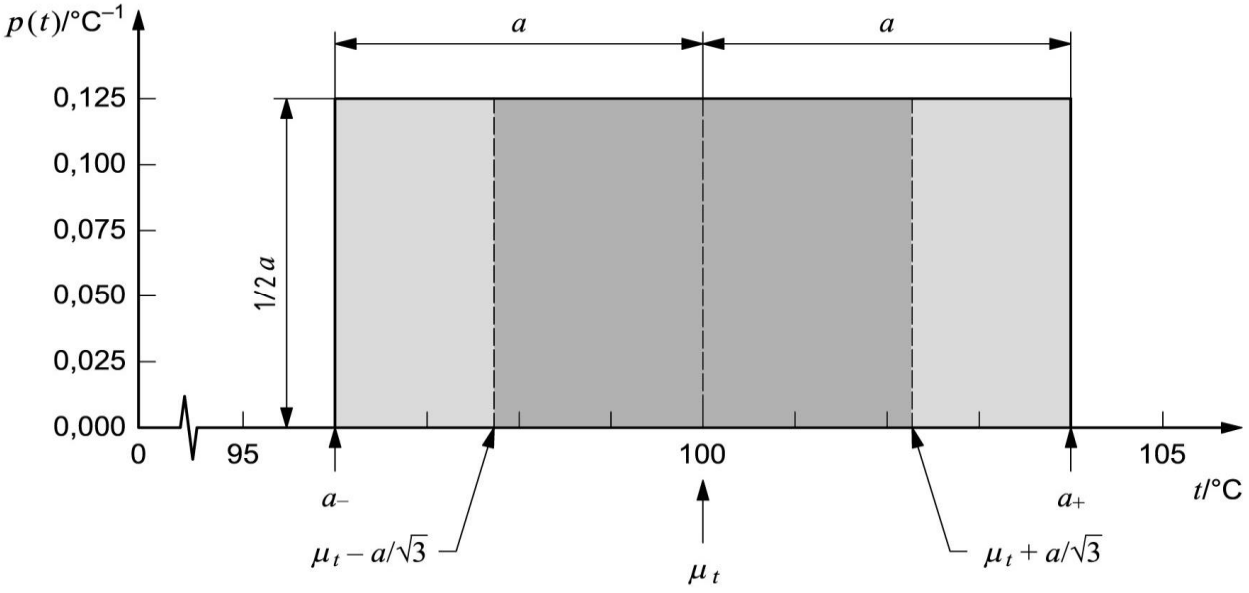
a)



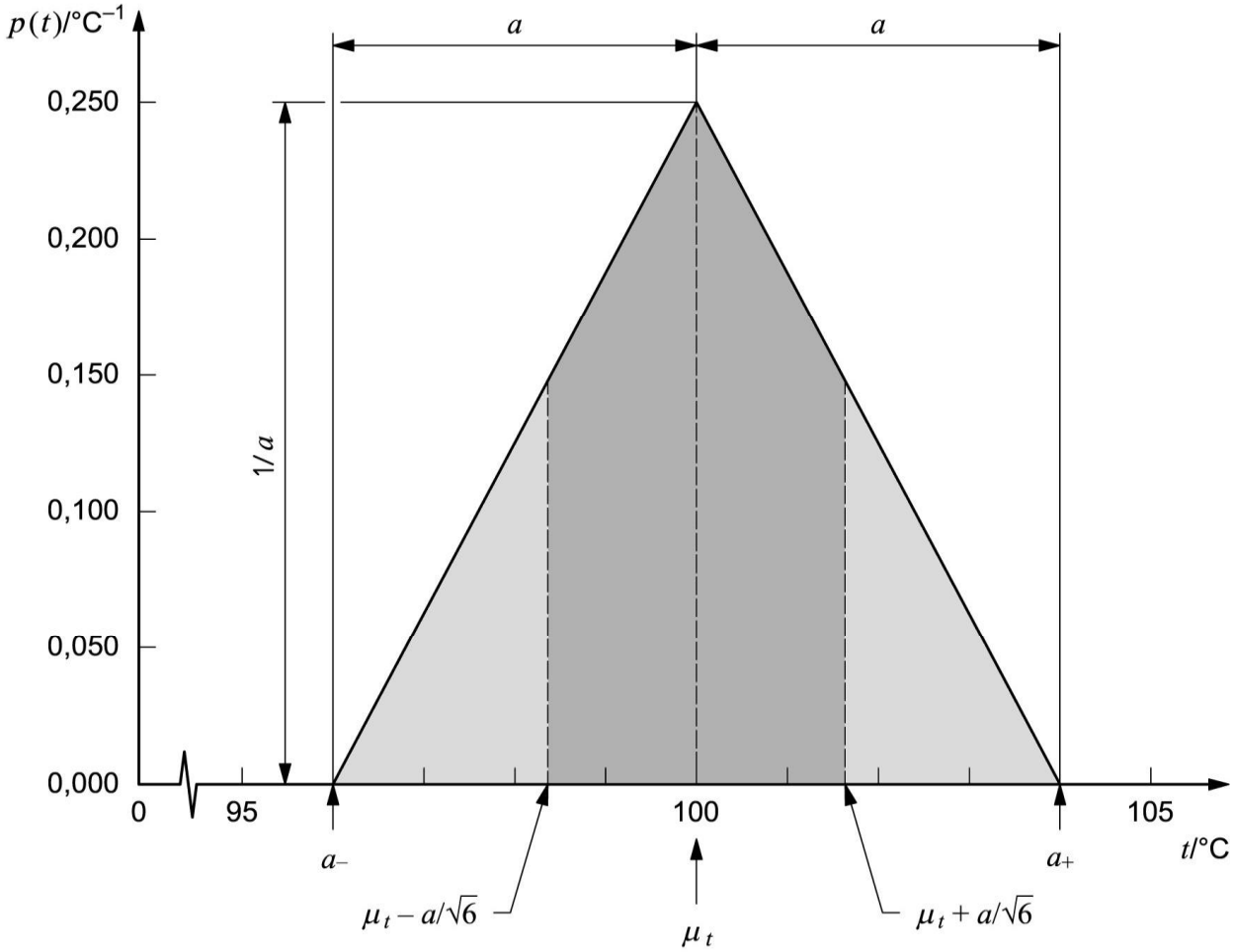
b)

Rys. 1 – Graficzna interpretacja wyznaczania niepewności standardowej wielkości wejściowej na podstawie powtórzonych obserwacji

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone



a)



b)

Rys. 2 – Graficzna interpretacja wyznaczania niepewności standardowej wielkości wejściowej na podstawie *a priori* danego rozkładu

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

4.4.4 Na rys. 2 przedstawiono oszacowanie wartości wielkości wejściowej X_i i wyznaczanie niepewności jej estymaty z *a priori* danego rozkładu możliwych wartości X_i, czyli z rozkładu prawdopodobieństwa X_i opartego na dostępnych informacjach. Dla obu przedstawionych przypadków założono, że wielkością wejściową jest temperatura *t.*

4.4.5 Dla przypadku przedstawionego na rys. 2a założono, że posiada się mało informacji o wielkości wejściowej *t*, i że wszystko co można zrobić, to założyć, że *t* jest opisane przez symetryczny, *a priori* prostokątny rozkład prawdopodobieństwa, z dolną granicą a_- = 96 °C, górną granicą a_+ = 104 °C i szerokością połówkową $a = (a_+ - a_-)/2$ = 4 °C (patrz 4.3.7). Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa *t* ma więc postać

$$p(t) = 1/2a \text{ dla } a_- \le t \le a_+$$

$$p(t) = 0 \text{ dla pozostałych.}$$

Jak wykazano w 4.3.7 najlepszą estymatą *t* jest jej wartość oczekiwana $\mu_t = (a_+ + a_-)/2$ = 100 °C, co wynika z C.3.1. Niepewność standardowa tej estymaty wynosi $u(\mu_t) = a/\sqrt{3}$ = 2,3 °C, co wynika z C.3.2 [patrz równanie (7)].

4.4.6 Dla przypadku przedstawionego na rysunku 2b założono, że posiada się więcej informacji dotyczących *t*, i że *t* może być opisane przez symetryczny, *a priori* trójkątny rozkład prawdopodobieństwa, z dolną granicą a_- = 96 °C, górną granicą a_+ = 104 °C i szerokością połówkową $a = (a_+ - a_-)/2$ = 4 °C, takimi samymi jak w 4.4.5 (patrz 4.3.7). Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa *t* ma więc postać

$$p(t) = (t - a_-)/a^2 \text{ dla } a_- \le t \le (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2 \text{ dla } (a_+ + a_-)/2 \le t \le a_+$$

$$p(t) = 0 \text{ dla pozostałych.}$$

Jak wykazano w 4.3.9 wartością oczekiwaną t jest $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, co wynika z C.3.1. Niepewność standardowa tej estymaty wynosi $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} = 1{,}6$ °C, co wynika z C.3.2 [patrz równanie (9b)].

Powyższą wartość $u(\mu_t)$ = 1,6 °C można porównać z $u(\mu_t)$ = 2,3 °C, otrzymaną w 4.4.5 dla rozkładu prostokątnego o tej samej szerokości 8 °C z σ = 1,5 °C, otrzymaną dla rozkładu normalnego, z rys. 1a, którego szerokość od $-2{,}58\sigma$ do $+2{,}58\sigma$ obejmuje 99 % rozkładu i która wynosi około 8 °C oraz z $u(\bar{t})$ = 0,33 °C, otrzymaną w 4.4.3, na podstawie 20 obserwacji, o których założono, że zostały losowo wybrane z tego samego rozkładu normalnego.

5 Określanie niepewności standardowej złożonej

5.1 Wielkości wejściowe nieskorelowane

W podrozdziale 5.1 analizuje się przypadek, gdy wszystkie wielkości wejściowe są **niezależne** (C.3.7). Przypadek, gdy dwie lub więcej wielkości są związane, to jest wzajemnie zależne, czyli **skorelowane** (C.2.8.) jest rozważany w 5.2.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

5.1.1 Niepewność standardową y, gdzie y jest estymatą menzurandu Y, a stąd wynikiem pomiaru, otrzymuje się jako odpowiednie złożenie niepewności standardowych estymat wielkości wejściowych $x_1, x_2, ..., x_N$ (patrz 4.1). *Niepewność standardowa złożona* estymaty y będzie oznaczana przez $u_c(y)$.

UWAGA Z powodów podobnych do podanych w uwadze do 4.3.1 symbole $u_c(y)$ i $u_c^2(y)$ są stosowane we wszystkich przypadkach.

5.1.2 Niepewność standardowa złożona $u_c(y)$ jest dodatnim pierwiastkiem kwadratowym ze wariancji złożonej $u_c^2(y)$ danej jako

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_c^2(x_i) \tag{10}$$

gdzie f jest funkcją podaną w równaniu (1). Każde $u(x_i)$ jest niepewnością standardową wyznaczaną tak, jak opisano w 4.2 (metoda typu A) albo jak w 4.3 (metoda typu B). Niepewność standardowa złożona $u_c(y)$ jest oszacowanym odchyleniem standardowym i charakteryzuje rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać menzurandowi Y (patrz 2.2.3).

Równanie (10) i jego odpowiedniki dla skorelowanych wielkości wejściowych oraz równanie (13), obydwa oparte na aproksymacji $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ szeregiem Taylora o wyrazach pierwszego rzędu, wyrażają to, co w *Przewodniku* jest nazywane *prawem propagacji niepewności* (patrz E.3.1 i E.3.2)

UWAGA Gdy nieliniowość f jest znaczna, w jej rozwinięciu w szereg Taylora, w wyrażeniu określającym $u_c^2(y)$ [równanie (10)], należy uwzględnić wyrazy wyższych rzędów. Gdy rozkład każdej wielkości X_i jest symetryczny względem jej wartości oczekiwanej, do wyrazów równania (10) należy dodać wyrazy drugiego rzędu

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i)\, u^2(x_j)$$

Patrz H.1, gdzie podano przykład, w którym należy uwzględnić wpływ wyrazów wyższych rzędów na $u_c^2(y)$.

5.1.3 Pochodne cząstkowe $\partial f / \partial x_i$ są równe $\partial f / \partial X_i$ wyznaczone, gdy $X_i = x_i$ (patrz uwaga 1 poniżej). Pochodne te, często nazywane współczynnikami wrażliwości, opisują jak estymata wielkości wyjściowej y zmienia się wraz ze zmianami wartości estymat wielkości wejściowych $x_1, x_2, ..., x_N$. W szczególności zmiana y spowodowana przez małą zmianę Δx_i estymaty wielkości wejściowej x_i wynosi $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Jeżeli zmiana ta jest spowodowana przez niepewność standardową estymaty x_i, to odpowiadająca jej wariancja y jest równa $(\partial f / \partial x_i) u \Delta x_i$. Wariancję złożoną $u_c^2(y)$ można więc traktować jako sumę wyrazów, z których każdy reprezentuje oszacowaną wariancję związaną z estymatą wielkości wyjściowej y, spowodowaną przez oszacowaną wariancję związaną z estymatą wielkości wejściowej x_i. Sugeruje to nadanie równaniu (10) postaci

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{11a}$$

gdzie

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \; u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \tag{11b}$$

UWAGA 1 Ściśle mówiąc, pochodne cząstkowe $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$ wyznacza się dla wartości oczekiwanych X_i. Jednakże w praktyce pochodne cząstkowe estymuje się przez

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, ..., x_N}$$

UWAGA 2 Niepewność standardową złożoną $u_c(y)$ można obliczyć zastępując $c_i\, u(x_i)$ w równaniu (11a) przez

$$Z_i = \frac{1}{2}\left\{ f\left[x_1, ..., x_i + u(x_i), ..., x_N\right] - f\left[x_1, ..., x_i - u(x_i), ..., x_N\right]\right\}$$

To znaczy, że wartość liczbową $u_i(y)$ wyznacza się obliczając zmianę y spowodowaną zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$. Jako wartość $u_i(y)$ przyjmuje się $|Z_i|$, a jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości c_i przyjmuje się $Z_i/u(x_i)$.

PRZYKŁAD Dla przykładu z 4.1.1, używając dla uproszczenia tego samego symbolu do oznaczenia wielkości i jej estymaty, mamy

$$c_1 = \partial P/\partial V = 2V\Big/\left\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\right\} = 2P/V$$

$$c_2 = \partial P/\partial R_0 = -V^2\Big/\left\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\right\} = -P/R_0$$

$$c_3 = \partial P/\partial \alpha = -V^2(t-t_0)\Big/\left\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\right\} = -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]$$

$$c_4 = \partial P/\partial t = -V^2\alpha\Big/\left\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\right\} = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

i

$$\begin{aligned} u^2(P) &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t) \\ &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\ &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P) \end{aligned}$$

5.1.4 Czasami, zamiast obliczać współczynniki wrażliwości $\partial f/\partial x_i$ z funkcji f, wyznacza się je eksperymentalnie. Mierzy się zmianę Y wywołaną przez pojedynczą zmianę określonej wielkości wejściowej X_i, podczas gdy pozostałe wielkości wejściowe pozostają stałe. W tym przypadku znajomość funkcji f (albo jej części, gdy wyznacza się tak tylko niektóre współczynniki wrażliwości) jest odpowiednio zredukowana do empirycznego rozwinięcia funkcji w szereg Taylora pierwszego rzędu, opartego na zmierzonych współczynnikach wrażliwości.

5.1.5 Jeśli funkcja f w równaniu (1) menzurandu Y zostanie rozwinięta wokół nominalnych wartości X_i, wielkości wejściowych $X_{i,0}$, wtedy z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu (co jest zwykle wystarczającym przybliżeniem) zachodzi: $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + ... + c_N\delta_N$, gdzie $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{N,0})$, $c_i \equiv (\partial f/\partial X_i)$ liczone dla $X_i = X_{i,0}$ i $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Stąd dla celów analizy niepewności, menzurand jest zwykle aproksymowany funkcją liniową swoich zmiennych poprzez transformacje jej wielkości wejściowych z X_i na δ_i (patrz E.3.1).

PRZYKŁAD W przykładzie 2 w 4.3.7 estymata wartości menzurandu V wynosi $V = \bar{V} + \Delta\bar{V}$, gdzie $\bar{V}$ = 0,928 571 V, $u(\bar{V})$ = 12 μV poprawka addytywna $\Delta\bar{V}$ = 0, a $u(\Delta\bar{V})$ = 8,7 μV. Ponieważ $\partial V/\partial\bar{V}$ = 1 i $\partial V/\partial(\Delta\bar{V})$ = 1, to wariancja złożona związana z V wynosi

$$u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta\bar{V}) = (12\ \mu\text{V})^2 + (8{,}7\ \mu\text{V})^2 = 219 \times 10^{-12}\ \text{V}^2$$

a niepewność standardowa złożona $u_c(V)$ = 15 μV, co odpowiada względnej niepewności standardowej złożonej $u_c(V)/V$ równej 16 × 10^{-6} (patrz 5.1.6). W przykładzie menzurand jest funkcją liniową wielkości wejściowych, ze współczynnikami c_i = +1. Z równania (10) wynika, że jeśli $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$ i stałe c_i = +1 lub –1, to $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$.

5.1.6 Jeśli Y ma postać $Y = cX_1^{p_1}X_2^{p_2}...X_N^{p_N}$, a wykładniki p_i są znanymi liczbami dodatnimi lub ujemnymi o znikomych niepewnościach, to wariancję złożoną, równanie (10), można wyrazić równaniem

$$\left[u_c(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i u(x_i)/x_i\right]^2 \tag{12}$$

Ma ono tę samą postać, co równanie (11a), ale z wariancją złożoną $u_c^2(y)$ wyrażoną jako *wariancja względna* $[u_c(y)/y]^2$ i oszacowaną wariancją $u^2(x_i)$ związaną z każdą wielkością wejściową wyrażoną jako oszacowana *wariancja względna* $[u(x_i)/x_i]^2$. [*Względna niepewność standardowa złożona* to $u_c(y)/|y|$, a *względna niepewność standardowa* estymaty każdej wielkości wejściowej to $u(x_i)/|x_i|$, przy czym $|y| \neq 0$ i $|x_i| \neq 0$].

UWAGA 1 Taką postać Y można przekształcić do funkcji liniowej wielkości wejściowych (patrz 5.1.5) przyjmując $X_i = X_{i,0}(1+\delta_i)$ i korzystając z przybliżonej zależności $(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i\delta_i$. Z drugiej strony transformacja logarytmiczna postaci $Z = \ln Y$ i $W_i = \ln X_i$ prowadzi do dokładnej linearyzacji w układzie nowych zmiennych $Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$.

UWAGA 2 Jeśli każde p_i jest równe +1 lub –1, równanie (12) przyjmuje postać $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[u(x_i)/x_i]^2$, a więc w tym specjalnym przypadku względna wariancja złożona związana z estymatą y jest równa sumie oszacowanych wariancji względnych związanych z estymatami wielkości wejściowych x_i.

5.2 Wielkości wejściowe skorelowane

5.2.1 Równanie (10) i wynikające z niego równania (11) i (12) pozostają słuszne tylko wtedy, gdy wielkości wejściowe X_i są niezależne lub nieskorelowane (chodzi tu o zmienne losowe, nie zaś o wielkości fizyczne, o których zakłada się, że są niezmienne – patrz 4.1.1, uwaga 1). Jeżeli niektóre z X_i są skorelowane w znaczącym stopniu, ich korelacje należy wziąć pod uwagę w obliczeniach.

5.2.2 Gdy wielkości wejściowe są skorelowane, to wyrażenie określające wariancję złożoną $u_c^2(y)$ wyniku pomiaru ma postać

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) \tag{13}$$

gdzie x_i i x_j są estymatami X_i i X_j, zaś $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ jest oszacowaną kowariancją związaną z x_i i x_j. Stopień korelacji pomiędzy x_i i x_j charakteryzuje oszacowany **współczynnik korelacji** (C.3.6.)

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{14}$$

gdzie $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ i $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$. Jeśli estymaty x_i i x_j są niezależne, to $r(x_i, x_j) = 0$ i zmiana jednej nie powoduje oczekiwanej zmiany drugiej. (Patrz dalszą dyskusję w C.2.8, C.3.6 i C.3.7).

Stosując współczynniki korelacji, które są łatwiejsze w interpretacji aniżeli kowariancje, człon z kowariancjami w równaniu (13) należy zapisać w postaci

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_1, x_j) \tag{15}$$

Równanie (13) po uwzględnieniu równania (11b) przyjmuje więc postać

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i\, c_j\, u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_1, x_j) \tag{16}$$

UWAGA 1 W szczególnym przypadku, gdy *wszystkie* estymaty wielkości wejściowych są skorelowane, a współczynniki korelacji wynoszą $r(x_i, x_j) = +1$, równanie (16) redukuje się do postaci

$$u_c^2(y) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^2$$

Niepewność standardowa złożona $u_c(y)$ jest wtedy *sumą liniową* wszystkich wyrazów reprezentujących wariancje estymaty wielkości wyjściowej y, spowodowane niepewnościami standardowymi estymat wielkości wejściowych x_i (patrz 5.1.3). [Tej liniowej sumy nie należy mylić z ogólnym prawem propagacji błędów, które ma podobną formę, niepewności standardowe nie są bowiem błędami (patrz E.3.2)].

PRZYKŁAD Dziesięć oporników, każdy o nominalnej rezystancji $R_i = 1000\ \Omega$, jest wzorcowane ze znikomą niepewnością porównania za pomocą takiego samego opornika wzorcowego R_S o nominalnej rezystancji 1000 mΩ scharakteryzowanego przez niepewność standardową $u(R_S) = 100\ \text{m}\Omega$ podaną w jego świadectwie wzorcowania. W celu otrzymania oporu wzorcowego R_{ref} o rezystancji nominalnej 10 kΩ oporniki te połączone są szeregowo za pomocą przewodów o znikomej rezystancji. Stąd $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Ponieważ $r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ dla każdej pary oporników (patrz F.1.2.3, przykład 2), stosuje się tu równanie z niniejszej uwagi. Ponieważ dla każdego opornika $\partial f / \partial x_i = \partial R_{ref} / \partial R_i = 1$ i $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (patrz F.1.2.3, przykład 2), równanie powyższe prowadzi do niepewności standardowej złożonej wielkości R_{ref}, $u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S) = 10 \times (100\ \text{m}\Omega) = 1\ \Omega$. Wynik $u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_S)\right]^{1/2} = 0{,}32\ \Omega$ otrzymany z równania (10) jest nieprawidłowy, ponieważ nie bierze on pod uwagę tego, że wszystkie wyznaczone wartości rezystancji dziesięciu oporników są skorelowane.

UWAGA 2 Oszacowane wariancje $u^2(x_i)$ i kowariancje $u(x_i, x_j)$ mogą być traktowane jako elementy macierzy kowariancji o elementach u_{ij}. Elementy diagonalne u_{ii} macierzy są wariancjami $u^2(x_i)$, zaś elementy pozadiagonalne u_{ij} $(i \neq j)$ są kowariancjami $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$. Jeśli estymaty dwóch wielkości wejściowych są nieskorelowane, to powiązane z nimi kowariancje i odpowiadające im elementy u_{ij} i u_{ji} macierzy są równe zero. Jeśli estymaty wszystkich wielkości wejściowych są nieskorelowane, wszystkie elementy pozadiagonalne są równe zero i macierz kowariancji jest diagonalna. (Patrz także C.3.5).

UWAGA 3 Dla ułatwienia obliczeń numerycznych równanie (16) można zapisać jako

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j r(x_i, x_j)$$

gdzie Z_i jest dane w 5.1.3, uwaga 2.

UWAGA 4 Jeśli wielkości X_i, w równaniu o postaci rozważanej w 5.1.6 są skorelowane, to wyrażenie

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N} [p_i u(x_i)/x_i][p_j u(x_j)/x_j] r(x_i, x_j)$$

należy dodać do prawej strony równania (12).

5.2.3 Rozważmy dwie średnie arytmetyczne $\bar{q}$ i $\bar{r}$, które są estymatami wartości oczekiwanych μ_q i μ_r dwóch zmiennych losowo wielkości q i r. Niech $\bar{q}$ i $\bar{r}$ będą obliczone z n niezależnych par równoczesnych obserwacji q i r, wykonanych w tych samych warunkach pomiaru (patrz B.2.15). Wtedy kowariancja $\bar{q}$ i $\bar{r}$ (patrz C.3.4) szacowana jest z

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \tag{17}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

gdzie q_k i r_k są poszczególnymi obserwacjami wielkości q i r, a $\bar{q}$ i $\bar{r}$ są obliczone z tych obserwacji zgodnie z równaniem (3). Jeśli obserwacje są faktycznie nieskorelowane, to oczekuje się, że obliczona kowariancja będzie bliska zeru.

Zatem oszacowana kowariancja dwóch skorelowanych wielkości wejściowych X_i i X_j, estymowanych przez średnie arytmetyczne $\bar{X}_i$ i $\bar{X}_j$, określone na podstawie par niezależnych powtórzonych równoczesnych obserwacji, jest dana jako $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$, gdzie $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ oblicza się zgodnie z równaniem (17). Zastosowanie równania (17) jest wyznaczaniem kowariancji metodą typu A. Oszacowany współczynnik korelacji $\bar{X}_i$ i $\bar{X}_j$ określa równanie (14): $r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \Big/ \left[s(\bar{X}_i) s(\bar{X}_j) \right]$.

UWAGA Przykłady, w których należy stosować kowariancje obliczone z równania (17) podano w H.2 i H.4.

5.2.4 Znacząca korelacja pomiędzy dwoma wielkościami wejściowymi może wystąpić, jeżeli do ich wyznaczenia zastosowano ten sam przyrząd pomiarowy, wzorzec pomiarowy lub dane odniesienia charakteryzujące się znaczną niepewnością standardową. Na przykład, jeżeli ten sam termometr jest używany do określenia poprawki temperaturowej potrzebnej do oszacowania wartości wielkości wejściowej X_i i do określenia podobnej poprawki temperaturowej potrzebnej do oszacowania wartości wielkości wejściowej X_j, to te dwie wielkości wejściowe mogą być znacząco skorelowane. Jednakże, jeżeli X_i i X_j z tego przykładu zostaną zdefiniowane tak, aby stały się one wielkościami nieskorygowanymi, a wielkości określające krzywą wzorcowania termometru były uwzględniane jako dodatkowe wielkości wejściowe z niezależnymi niepewnościami standardowymi, to korelacja pomiędzy X_i i X_j zostaje usunięta. (Bardziej szczegółowa dyskusja patrz F.1.2.3 i F.1.2.4).

5.2.5 Korelacji pomiędzy wielkościami wejściowymi nie można ignorować, jeśli występują one i są znaczące. Kowariancje opisujące te korelacje należy wyznaczać eksperymentalnie, poprzez zmiany skorelowanych wielkości wejściowych, jeśli tylko jest to możliwe (patrz C.3.6, uwaga 3), albo wykorzystując posiadaną wiedzę o skorelowanej zmienności wielkości, o których mowa (wyznaczanie kowariancji metodą typu B). Intuicja wypływająca z posiadanego doświadczenia i ogólnej wiedzy (patrz 4.3.1 i 4.3.2) jest szczególnie pożądana przy szacowaniu stopnia skorelowania między wielkościami wejściowymi wynikającego z wpływów takich czynników jak temperatura otoczenia, ciśnienie barometryczne i wilgotność. Na szczęście, w wielu przypadkach wpływy tych czynników mają znikomą wzajemną zależność i o podlegających im wielkościach wejściowych można przyjmować, że są nieskorelowane. Jednakże, jeżeli założenia takiego przyjąć nie można, to samych korelacji można uniknąć, wprowadzając wspólne czynniki jako dodatkowe niezależne wielkości wejściowe, jak pokazano w 5.2.4.

6 Określanie niepewności rozszerzonej

6.1 Wprowadzenie

6.1.1 Zalecenie INC-1 (1980) Grupy Roboczej do spraw Ustalania Niepewności, na którym jest oparty *Przewodnik* (patrz Wprowadzenie) oraz Zalecenie 1 (CI-1981) i zalecenie 1 (CI-1986) CIPM aprobujące i potwierdzające INC-1 (1980) (patrz A.2 i A.3) zalecają stosowanie niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$ jako parametru ilościowo wyrażającego niepewność wyniku pomiaru. I tak, w drugim ze swych zaleceń CIPM wyraził życzenie, aby to, co teraz jest nazywane niepewnością standardową złożoną, $u_c(y)$ było stosowane "przy podawaniu wyników przez wszystkich uczestniczących we wszystkich międzynarodowych porównaniach i innych pracach wykonywanych pod auspicjami CIPM i Komitetów Konsultacyjnych".

6.1.2 Chociaż $u_c(y)$ może być powszechnie stosowne do wyrażania niepewności wyniku pomiaru, to w pewnych handlowych, przemysłowych i prawnych zastosowaniach, jak również wtedy, gdy chodzi o zdrowie i bezpieczeństwo, niejednokrotnie konieczne jest podawanie takiej miary niepewności, która określa przedział wokół wyniku pomiaru, od którego można oczekiwać, że obejmuje sporą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać menzurandowi. Potrzeba takich wymagań została stwierdzona przez

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Grupę Roboczą i wprowadzona do paragrafu 5 Zalecenia INC-1 (1980). Jest to także uwzględnione w Zaleceniu 1 (CI-1986) CIPM.

6.2 Niepewność rozszerzona

6.2.1 Dodatkowa miara niepewności, spełniająca wymaganie podania przedziału omówionego w 6.1.2 jest nazywana *niepewnością rozszerzoną* i oznaczana przez U. Niepewność rozszerzona U jest otrzymywana przez pomnożenie niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$ przez *współczynnik rozszerzenia* k

$$U = k\, u_c(y) \tag{18}$$

Wynik pomiaru jest przy tym często umownie podawany jako $Y = y \pm U$, co interpretuje się, iż najlepszą wartością, jaką można przypisać menzurandowi Y, jest y, i że $y - U$ do $y + U$ jest przedziałem, od którego można oczekiwać, że obejmuje dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości Y. Taki przedział jest także wyrażany jako $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Terminy **przedział ufności** (C.2.27 i C.2.28) i **poziom ufności** (C.2.29) mają specyficzne definicje w statystyce i są tylko wtedy stosowane do przedziału określonego za pomocą U, gdy spełnione są pewne warunki, w tym warunek, żeby wszystkie składowe niepewności, które wchodzą do $u_c(y)$ były wyznaczone metodą typu A. Stąd w *Przewodniku*, słowo "ufność" nie jest stosowane do określenia słowa przedział, gdy chodzi o przedział określony przez U. Bardziej szczegółowa interpretacja: U określa wokół wyniku przedział, który obejmuje dużą część p rozkładu prawdopodobieństwa charakteryzowanego przez ten wynik i jego niepewność standardową złożoną, zaś p jest *prawdopodobieństwem rozszerzenia* lub *poziomem ufności* przedziału.

6.2.3 Gdy wymaga tego praktyka, poziom ufności *p* powiązany z przedziałem określonym przez U powinien być oszacowany i ustalony. Należy zauważyć, że pomnożenie $u_c(y)$ przez stałą nie dostarcza żadnych nowych informacji, ale przedstawia wcześniej uzyskane informacje w innej formie. Należy także zauważyć, że w większości przypadków poziom ufności p (szczególnie dla wartości p bliskich jedności) jest raczej niepewny nie tylko z powodu ograniczonej znajomości rozkładu prawdopodobieństwa charakteryzowanego przez y i $u_c(y)$ (w szczególności w częściach krańcowych), ale także z powodu niepewności odnośnie samej niepewności $u_c(y)$ jako takiej (patrz uwaga 2 do 2.3.5, 6.3.2 i aneks G, w szczególności G.6.6).

UWAGA O zalecanych sposobach podawania wyniku pomiaru, gdy za miarę niepewności przyjmuje się $u_c(y)$ i U patrz 7.2.2 i 7.2.4, odpowiednio.

6.3 Wybór współczynnika rozszerzenia

6.3.1 Wartość współczynnika rozszerzenia k wybiera się na podstawie wymaganego poziomu ufności dla przedziału od $y - U$ do $y + U$. Zwykle wartość k zawiera się w granicach od 2 do 3. Jednakże dla specjalnych zastosowań k może być wybrane spoza tego przedziału. Posiadane doświadczenie i znajomość sposobów wykorzystania wyniku pomiaru ułatwiają wybór właściwej wartości k.

UWAGA Niekiedy zdarza się, że podając wynik pomiaru nie uwzględniono w nim poprawki b ze względu na oddziaływania systematyczne, a zamiast tego podjęto próbę uwzględnienia wpływu oddziaływań systematycznych przez powiększenie "niepewności" przypisanej do wyniku. Należy unikać takiego postępowania. Tylko w wyjątkowych okolicznościach nie powinno się uwzględniać w wyniku pomiaru poprawek od znanych i znaczących oddziaływań systematycznych (o takim właśnie przypadku i sposobie jego traktowania patrz F.2.4.5). Wyznaczania niepewności wyniku pomiaru nie powinno się mylić z ustalaniem bezpiecznych granic niektórym wielkościom.

6.3.2 Idealnie byłoby móc wybrać wartość współczynnika rozszerzenia k, która wyznaczałaby przedział $Y = y \pm U = y \pm k\, u_c(y)$ odpowiadający ściśle określonemu poziomowi ufności p, takiemu jak 95 % lub 99 %. Innymi słowami, dla danej wartości k chciałoby się móc jednoznacznie ustalić poziom ufności powiązany z tym przedziałem. Nie jest to jednakże łatwe do wykonania w praktyce, ponieważ wymaga to szczegółowej wiedzy o rozkładzie prawdopodobieństwa charakteryzowanym przez wynik pomiaru *y* i jego niepewność standardową

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

złożoną $u_c(y)$. Chociaż te parametry są szczególnie ważne, one same nie wystarczają do ustalenia przedziałów mających dokładnie znane poziomy ufności.

6.3.3 Zalecenie INC-1 (1980) nie określa sposobu ustalania związków pomiędzy k i p. Problem ten jest dyskutowany w aneksie C, zaś zalecana metoda jego przybliżonego rozwiązania jest przedstawiona w G.4 i podsumowana w G.6.4. Jednakże prostsze sposoby, dyskutowane w G.6.6, są często wystarczające w tych sytuacjach pomiarowych, gdy rozkład prawdopodobieństwa charakteryzowany przez y i $u_c(y)$ jest w przybliżeniu normalny, a wypadkowa liczba stopni swobody $u_c(y)$ jest duża. Gdy zachodzi taki przypadek, zdarzający się zresztą często w praktyce, można założyć, że przyjmując $k = 2$ tworzy się przedział o poziomie ufności w przybliżeniu równym 95 %, zaś przyjmując $k = 3$ tworzy się przedział o poziomie ufności w przybliżeniu równym 99 %.

UWAGA Metodę szacowania wypadkowej liczby stopni swobody niepewności standardowej złożonej $u_C(y)$ podano w G.4. Pomocną przy rozstrzyganiu adekwatności przyjętego rozwiązania dla danego pomiaru może być tabela G.2 z aneksu G. (patrz G.6.6).

7 Podawanie niepewności

7.1 Wskazówki ogólne

7.1.1 Ogólnie, na im wyższym hierarchicznie poziomie wykonywany jest pomiar, tym więcej wymaga się szczegółowych informacji o sposobie otrzymania wyniku pomiaru i jego niepewności. Pomimo to, na każdym poziomie tej hierarchii, włączając w to działalność handlową i legislacyjną w obrębie rynku, prace inżynierskie w przemyśle, wzorcowania na niższych poziomach, badania przemysłowe i rozwojowe, badania akademickie, przemysłowe laboratoria wzorcujące oraz laboratoria wzorców państwowych i BIMP, wszystkie informacje niezbędne do odtwarzania obliczeń wyniku pomiaru powinny być dostępne dla każdego, kto tego potrzebuje. Podstawowa różnica polega na tym, że na niższych poziomach hierarchicznych, więcej niezbędnych informacji może być udostępnionych w formie publikowanych raportów dotyczących systemu wzorcowania i badań, specyfikacji badań, świadectw wzorcowania, podręcznych instrukcji, norm międzynarodowych i krajowych oraz przepisów lokalnych.

7.1.2 Gdy szczegóły dotyczące pomiaru, włączając w to informacje o sposobie obliczania niepewności wyniku pomiaru, są podawane przez odwołanie się do publikowanych dokumentów, co często ma miejsce, gdy wyniki wzorcowania są podawane w jego świadectwie, niezbędnym jest uaktualnianie tych publikacji w sposób zapewniający spójność z aktualnie stosowaną procedurą pomiarową.

7.1.3 Każdego dnia w przemyśle i handlu wykonywanych jest wiele pomiarów bez jakiegokolwiek jawnego podania ich niepewności. Jednakże, wiele z tych pomiarów wykonuje się za pomocą przyrządów podlegających okresowemu wzorcowaniu lub legalizacji. Gdy o przyrządach tych wiadomo, że ich właściwości są zgodne z ich specyfikacjami lub z aktualnie stosowanymi dokumentami normatywnymi, niepewności ich wskazań mogą być określone na podstawie tych specyfikacji lub tych dokumentów normatywnych.

7.1.4 Chociaż w praktyce ilość informacji niezbędna do udokumentowania wyniku pomiaru zależy od zamierzonego jego wykorzystania, podstawowa zasada, której przestrzegania wymaga się, pozostaje niezmieniona: przy podawaniu wyniku pomiaru i jego niepewności należy raczej podać za dużo informacji, niż za mało. Na przykład powinno się:

a) opisać przejrzyście metody zastosowane do obliczenia wyniku pomiaru i jego niepewności na podstawie obserwacji eksperymentalnych i danych wejściowych,

b) wymienić wszystkie składowe niepewności i w pełni udokumentować to, jak były one wyznaczone,

c) przedstawić analizę danych w taki sposób, żeby każdy z jej ważnych etapów mógł być odtworzony i aby obliczenie podanego wyniku pomiaru mogło być niezależnie odtworzone, jeżeli zachodziłaby taka potrzeba,

d) podać wszystkie poprawki i wartości stałych zastosowanych w analizie oraz ich źródła.

Sprawdzianem tego, czy postępowano według powyższej listy jest odpowiedzenie na zadane sobie pytania „Czy podałem dość informacji w sposób na tyle jasny, aby mój wynik mógł być w przyszłości uaktualniony, jeśli pojawią się nowe informacje lub dane?”.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

7.2 Wskazówki szczegółowe

7.2.1 Podając wynik pomiaru, gdy miarą niepewności jest niepewność standardowa złożona $u_c(y)$, należy:

a) podać pełną definicję menzurandu Y,

b) podać estymatę y menzurandu Y i jej niepewność standardową złożoną $u_c(y)$; należy zawsze podawać jednostki, w których y i $u_c(y)$ są wyrażone,

c) podać, gdy zachodzi tego potrzeba, względną niepewność standardową złożoną $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$,

d) podać informację określoną w 7.2.7 albo wymienić opublikowany dokument, który tę informację zawiera.

Jeżeli wydaje się to użyteczne dla użytkowników wyniku pomiaru, na przykład w celu uzyskania pomocy w przyszłych obliczeniach współczynników rozszerzenia lub w celu lepszego zrozumienia pomiaru, można podać:

– oszacowaną wypadkową liczbę stopni swobody ν_{eff} (patrz G.4),

– niepewności standardowe złożone typu A i typu B, $u_{\mathrm{cA}}(y)$ i $u_{\mathrm{cB}}(y)$ oraz oszacowane wypadkowe liczby stopni swobody ν_{effA} i ν_{effB} (patrz G.4.1, uwaga 3).

7.2.2 Gdy miarą niepewności jest niepewność standardowa złożona $u_c(y)$, w celu uniknięcia niewłaściwego zrozumienia, preferuje się podawanie wartości liczbowej wyniku pomiaru w jednej z czterech podanych niżej postaci. (Wielkością, której wartość będzie podawana, jest masa m_S odważnika wzorcowego o nominalnej masie 100 g; słowa w nawiasach mogą być pominięte, jeżeli w dokumencie podającym wynik zostało gdziekolwiek zdefiniowane u_c).

1) "m_S = 100,021 47 g z (niepewnością standardową złożoną) u_c = 0,35 mg",

2) "m_S = 100,021 47(35) g, gdzie liczba w nawiasach jest wartością (niepewności standardowej złożonej) u_c odniesioną do ostatnich cyfr podawanego wyniku",

3) "m_S = 100,021 47(0,000 35) g, gdzie liczba w nawiasach jest wartością (niepewności standardowej złożonej) u_c wyrażoną w tej samej jednostce, co wynik",

4) "m_S = (100,021 47 ± 0,000 35) g, gdzie liczba zapisana za symbolem ± jest wartością (niepewności standardowej złożonej) u_c, a nie jest przedziałem ufności".

UWAGA Powinno się unikać, jeżeli tylko jest to możliwe, symbolu ±, ponieważ tradycyjnie był on stosowany do zapisywania przedziału odpowiadającego wysokiemu poziomowi ufności i stąd może być mylony z niepewnością rozszerzoną (patrz 7.2.4). Poza tym, chociaż celem uwagi w 4) jest zapobieżenie takiej pomyłce, pisząc $Y = y \pm u_C(y)$ można jednak, zwłaszcza gdy uwaga ta przypadkowo zostanie opuszczona, być źle zrozumianym i zapis ten może być odebrany jako podanie niepewności rozszerzonej ze współczynnikiem rozszerzenia k = 1, co znaczyłoby, że przedział $y - u_C(y) \leq Y \leq y + u_C(y)$ ma poziom ufności p wynikający z rozkładu normalnego (patrz G.1.3). Jak wykazano w 6.3.2 i w aneksie G taką interpretację $u_C(y)$ trudno jest zwykle usprawiedliwić.

7.2.3 Podając wynik pomiaru, gdy miarą niepewności jest niepewność rozszerzona $U = k\, u_c(y)$, należy:

a) podać pełną definicję menzurandu Y,

b) podać wynik pomiaru jako $Y = y \pm U$ i podać jednostki y i U,

c) podać, gdy zachodzi tego potrzeba, względną niepewność rozszerzoną $U/|y|$, $|y| \neq 0$,

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

d) podać wartość k przyjętą do obliczenia U [albo, dla wygody użytkownika wyniku, podać zarówno k jak i $u_c(y)$],

e) podać przybliżoną wartość poziomu ufności związanego z przedziałem $y \pm U$ oraz podać sposób jego wyznaczenia,

f) podać informację określoną w 7.2.7 albo wymienić opublikowany dokument, który tę informację zawiera.

7.2.4 Gdy miarą niepewności jest niepewność rozszerzona U, preferuje się, dla większej jasności tekstu, podawanie wartości liczbowej wyniku pomiaru tak jak w następującym przykładzie. (Słowa w nawiasach mogą być pominięte dla zwięzłości tekstu, jeżeli w dokumencie podającym wynik zostały gdziekolwiek zdefiniowane U, u_c i k).

"m_S = (100,021 47 ± 0,000 79) g, gdzie liczba za symbolem ± jest wartością (niepewności rozszerzonej) $U = k\,u_c$, z U obliczonym dla (niepewności standardowej złożonej) u_c = 0,35 mg i (współczynnika rozszerzenia) k = 2,26 opartego na rozkładzie t-Studenta o liczbie stopni swobody ν = 9 i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 95 %".

7.2.5 Jeżeli w procesie pomiaru wyznacza się równocześnie więcej niż jeden menzurand, to jest, jeżeli w wyniku pomiaru otrzymuje się estymaty dwóch lub więcej wielkości wyjściowych y_i (patrz H.2, H.3 i H.4), wtedy dodatkowo, oprócz y_i i $u_c(y_i)$, należy podać elementy macierzy kowariancji $u(y_i, y_j)$ albo elementy $r(y_i, y_j)$ **macierzy współczynników korelacji** (C.3.6, uwaga 2) (a najlepiej elementy obydwu macierzy).

7.2.6 Wartości liczbowe estymaty y i jej niepewności standardowej $u_c(y)$ lub niepewności rozszerzonej U nie powinny być podawane z nadmierną liczbą cyfr. Zwykle wystarcza podać $u_c(y)$ i U [jak również niepewności standardowe $u(x_i)$ estymat wielkości wejściowych x_i] z najwyżej dwiema cyframi znaczącymi, chociaż w niektórych przypadkach może być konieczne pozostawienie dodatkowych cyfr w celu uniknięcia błędów zaokrąglania w dalszych obliczeniach.

Przy podawaniu końcowych wyników może być czasami uzasadnione zaokrąglenie niepewności raczej w górę aniżeli do najbliższej cyfry. I tak na przykład, $u_c(y)$ = 10,47 mΩ mogłoby być zaokrąglone w górę do 11 mΩ. Jednakże, ogólne zasady zaokrąglania powinny przeważyć i wartość taką jak $u(x_i)$ = 28,05 kHz należy zaokrąglić w dół do 28 kHz. Estymaty wielkości wyjściowych i wielkości wejściowych powinny być zaokrąglone tak, aby pod względem liczby cyfr znaczących były zgodne ze swoimi niepewnościami; i tak, jeśli y = 10,057 62 Ω przy $u_c(y)$ = 27 mΩ, to y należy zaokrąglić do 10,058 Ω. Współczynniki korelacji powinny być podane z dokładnością do trzech cyfr, jeśli ich wartości bezwzględne są bliskie jedności.

7.2.7 W szczegółowym sprawozdaniu opisującym sposób otrzymywania wyniku pomiaru i jego niepewności powinno się postępować zgodnie z zaleceniami punktu 7.1.4, a więc:

a) podawać wartość każdej estymaty wielkości wejściowej x_i i jej niepewności standardowej $u(x_i)$ wraz z opisem sposobu ich wyznaczenia,

b) podawać oszacowane kowariancje i współczynniki korelacji (najlepiej jedne i drugie) wszystkich estymat wielkości wejściowych, które są skorelowane oraz metody zastosowane do ich wyznaczenia,

c) podawać stopnie swobody dla niepewności standardowych każdej estymaty wielkości wejściowej oraz sposób ich wyznaczenia,

d) podawać zależność funkcyjną $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ i, gdy będzie się to wydawało celowe, także pochodne cząstkowe, czyli współczynniki wrażliwości $\partial f / \partial x_i$. Należy także podawać wszelkie współczynniki wyznaczone eksperymentalnie.

UWAGA Ponieważ zależność funkcyjna f może być bardzo złożona albo może nie być dana w sposób jawny, tylko w postaci programu komputerowego, nie zawsze istnieje możliwość podania f i jej pochodnych. Funkcja f może być zatem

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

opisana w kategoriach ogólnych, a zastosowany program może być podany w odpowiednich materiałach. W takich przypadkach ważną sprawą jest jasne określenie estymaty y menzurandu Y i sposobu określania jego niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$.

8 Skrócona procedura wyznaczania i wyrażania niepewności

Kolejne etapy wyznaczania i wyrażania niepewności wyniku pomiaru metodami przedstawionymi w *Przewodniku* można uporządkować następująco:

1) Wyrażenie zależności pomiędzy menzurandem Y i wielkościami wejściowymi X_i, od których Y zależy, w postaci funkcji $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. Funkcja f powinna zawierać wszystkie wielkości, włączając w to poprawki i współczynniki poprawkowe, uwzględniające oddziaływania, które mogą wnosić znaczące składowe do niepewności wyniku pomiaru (patrz 4.1.1 i 4.1.2).

2) Określanie x_i, jako oszacowanych wartości wielkości wejściowych X_i, albo na podstawie analizy statystycznej serii obserwacji, albo za pomocą innych metod (patrz 4.1.3).

3) Wyznaczanie *niepewności standardowych* $u(x_i)$ dla każdej estymaty x_i wielkości wejściowej. Dla estymaty otrzymanej na drodze statystycznej analizy serii obserwacji, niepewności standardowe $u(x_i)$ wyznacza się tak jak podano w 4.2 (*wyznaczanie niepewności metodą typu A*). Dla estymat otrzymanych innymi metodami, niepewności standardowe $u(x_i)$ wyznacza się tak jak opisano w 4.3 (*wyznaczanie niepewności metodą typu B*).

4) Wyznaczanie kowariancji związanych z estymatami wartości wielkości wejściowych skorelowanych (patrz 5.2).

5) Obliczenie wyniku pomiaru, to jest estymaty y menzurandu Y z zależności funkcyjnej f, używając estymat x_i dla wartości wielkości wejściowych X_i, otrzymanym w punkcie 2 (patrz 4.1.4).

6) Określenie *niepewności standardowej złożonej* $u_c(y)$ wyniku pomiaru y na podstawie niepewności standardowych i kowariancji związanych z estymatami wartości wielkości wejściowych, tak jak opisano w rozdziale 5. Jeżeli w pomiarze określa się równocześnie więcej niż jedną wielkość wyjściową, należy także obliczyć ich kowariancje (patrz 7.2.5, H.2, H.3 i H.4).

7) Określenie, jeżeli jest to konieczne, *niepewności rozszerzonej* U służącej do wyznaczania przedziału od $y - U$ do $y + U$, który powinien obejmować dużą część rozkładu wartości, które można w sposób uzasadniony przypisać menzurandowi Y. Niepewność rozszerzoną U oblicza się mnożąc niepewność standardową złożoną $u_c(y)$ przez *współczynnik rozszerzenia* k, zwykle mieszczący się w zakresie od 2 do 3, czyli $U = k\, u_c(y)$. Wartość k wybiera się na podstawie żądanego poziomu ufności (patrz 6.2, 6.3, a szczególnie aneks G, w którym omówiony jest wybór wartości k wyznaczającej przedział o poziomie ufności bliskim wymaganej wartości).

8) Podanie wyniku pomiaru y wraz z jego niepewnością standardową złożoną $u_c(y)$ lub niepewnością rozszerzoną U, tak jak to przedstawiono w 7.2.1 i 7.2.3, stosując któryś ze sposobów zalecanych w 7.2.2 i 7.2.4. Do wyniku pomiaru należy dołączyć, jak to podkreślono także w rozdziale 7, opis sposobu wyznaczenia y i $u_c(y)$ lub U.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks A

Zalecenia Grupy Roboczej i CIPM

A.1 Zalecenie INC-1 (1980)

Grupa Robocza d/s Określania Niepewności została powołana w październiku 1980 r. przez Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM) w odpowiedzi na prośbę Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM). Grupa przygotowała szczegółowy raport przedstawiony do rozpatrzenia przez CIPM, zakończony Zaleceniem INC-1 (1980) [2]. Oryginalny pierwotny tekst francuski jest przytoczony poniżej.

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1) L'incertitude d'un résultat de mesure compered généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leuer valeur numériqe:

   A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,

   B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

   C. Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classemment dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurement pour classer less incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

   Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendere une liste compèlte de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valuer numérique.

2) Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écarts-types» estimés s_i) et les nombres v_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3) Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des «écarts-types». Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4) L'incertitude composée devrait être caractérisée par la vauer obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'«écart-types».

5) Si pour des utilisations particulières on est amené à multipleir par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numériqe de ce facteur doit toujours être donnée.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

A.2 Zalecenie 1 (CI-1981)

CIPM zapoznał się z raportem przedłożonym mu przez Grupę Roboczą d/s Określania Niepewności i na swym 70. posiedzeniu, w październiku 1981 r. [3] przyjął zalecenie:

Zalecenie 1 (CI-1981)

Wyrażenie niepewności eksperymentalnych
Międzynarodowy Komitet Miar
zważywszy na

- potrzebę znalezienia uzgodnionego sposobu wyrażania niepewności pomiaru w metrologii,
- wysiłki poczynione w tym celu przez wiele organizacji na przestrzeni wielu lat,
- zachęcający postęp dokonany w poszukiwaniu akceptowalnego rozwiązania, będący wynikiem dyskusji Grupy Roboczej d/s Wyrażania Niepewności, które odbyły się w BIPM w 1980 r.,

uznaje

- że propozycje Grupy Roboczej mogą stanowić podstawę do ewentualnego uzgodnienia sposobu wyrażania niepewności,

zaleca

- aby propozycje Grupy Roboczej były szeroko rozpowszechnione,
- aby BIPM podjął próbę stosowania zasad tu podanych do międzynarodowych porównań przeprowadzanych pod jego auspicjami w najbliższych latach,
- aby inne zainteresowane organizacje były zachęcane do sprawdzenia i badania tych propozycji oraz do przekazywania swoich uwag i komentarzy do BIPM,
- aby po dwóch albo trzech latach BIPM zdało sprawozdanie na temat stosowania tych propozycji.

A.3 Zalecenie 1 (CI-1986)

CIPM kontynuował rozważania na temat wyrażania niepewności na swym 75. posiedzeniu, w październiku 1986 r. [4] i przyjął zalecenie:

Zalecenie 1 (CI-1986)

Wyrażenie niepewności w pracach prowadzonych pod auspicjami CIPM
Międzynarodowy Komitet Miar,
biorąc pod uwagę przyjęcie przez Grupę Roboczą d/s Określania Niepewności Zalecenia INC-1 (1980) i przyjęcie przez CIPM Zalecenia 1 (CI-1981),
zważywszy, że niektórzy członkowie Komitetu Konsultacyjnego mogą potrzebować objaśnienia tego Zalecenia w odniesieniu do prac przez nich prowadzonych, szczególnie prac związanych z porównaniami międzynarodowymi, *zauważa*, że paragraf 5 Zalecenia INC-1 (1980) odnoszący się do specjalnych zastosowań, szczególnie takich, które mają znaczenie handlowe, jest obecnie rozważany przez grupę roboczą Międzynarodowej Organizacji Normalizacyjnej (ISO) reprezentującą ISO, OIML i IEC, za zgodą i przy współpracy CIMP, *prosi*, aby paragraf 4 Zalecenia INC-1 (1980) był stosowany przy podawaniu wyników przez wszystkich uczestniczących we wszystkich międzynarodowych porównaniach i innych pracach wykonywanych pod auspicjami CIPM i Komitetu Konsultacyjnego i aby niepewność złożona składająca się z niepewności typu A i typu B była podana w formie *pojedynczego odchylenia standardowego*.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks B

Ogólne terminy metrologiczne

B.1 Źródło definicji

Podane niżej definicje ogólnych terminów metrologicznych związanych merytorycznie z treścią *Przewodnika* zaczerpnięto z drugiego wydania *Międzynarodowego słownika podstawowych i ogólnych terminów metrologii** [6] (w skrócie VIM) opublikowanego przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) w imieniu siedmiu organizacji, które wspierały jego opracowanie oraz desygnowały ekspertów do jego opracowania. Były to: Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM), Międzynarodowa Komisja Elektryczna (IEC), Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej (IFCC), Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO), Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC), Międzynarodowa Unia Fizyki Teoretycznej i Stosowanej (IUPAP), Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej (OIML). Słownik VIM powinien być pierwszym źródłem, w którym należy szukać definicji terminów nie zdefiniowanych w niniejszym dodatku lub w tekście *Przewodnika*.

UWAGA Niektóre podstawowe terminy i pojęcia statystyczne podano w aneksie C. Terminy "wartość prawdziwa", "błąd" i "niepewność" są ponadto omawiane w aneksie D.

B.2 Definicje

Podobnie jak w rozdziale 2, ujęte w nawias słowa w nazwie pojęcia można opuścić, jeżeli ich pominięcie nie powoduje nieporozumień.

Terminy wyróżnione w uwagach do definicji grubą czcionką są dodatkowymi terminami metrologicznymi zdefiniowanymi bezpośrednio lub pośrednio w tych uwagach (patrz także [6]).

B.2.1
wielkość (mierzalna)
cecha zjawiska, ciała lub substancji, którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo

UWAGA 1 Termin wielkość może się odnosić do wielkości w znaczeniu ogólnym (Przykład 1) lub do wielkości w znaczeniu szczególnym, to znaczy do **wielkości określonej** (Przykład 2).

PRZYKŁAD 1 Wielkości w znaczeniu ogólnym: długość, czas, masa, temperatura, opór elektryczny, stężenie molowe.

PRZYKŁAD 2 Wielkości określone:
- długość danego pręta,
- opór elektryczny danej próbki drutu,
- stężenie ilości etanolu w danej próbce wina.

UWAGA 2 Wielkości, które można klasyfikować jedne względem drugich w porządku rosnącym (lub malejącym), są nazywane **wielkościami tego samego rodzaju**.

UWAGA 3 Wielkości tego samego rodzaju można grupować w **kategorie wielkości,** na przykład:
- praca, ciepło, energia,
- grubość, obwód, długość fali.

UWAGA 4 **Symbole wielkości** podane są w normie ISO 31*.

[VIM:1993, definicja 1.1]

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Trzecie wydanie słownika zostało opublikowane w 2008 roku pod tytułem JCGM 200:2008 *Międzynarodowy słownik metrologii – Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nim związane (VIM)*.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

B.2.2
wartość (wielkości)
wyrażenie ilościowe wielkości określonej na ogół w postaci iloczynu liczby i jednostki miary

PRZYKŁAD 1 Długość pręta: 5,34 m lub 534 cm

PRZYKŁAD 2 Masa ciała: 0,152 kg lub 152 g

PRZYKŁAD 3 Ilość substancji próbki wody (H_2O): 0,012 mol lub 12 mmol

UWAGA 1 Wartość wielkości może być dodatnia, ujemna lub zero.

UWAGA 2 Wartość wielkości może być wyrażona na więcej niż jeden sposobów.

UWAGA 3 Wartości wielkości o wymiarze jeden są na ogół wyrażane w postaci samych liczb.

UWAGA 4 Wielkość, której nie można wyrazić jako jednostkę miary pomnożoną przez liczbę, można wyrazić odwołując się do umownej skali odniesienia lub do konkretnej procedury pomiarowej lub do obu jednocześnie.

[VIM:1993, definicja 1.18]

B.2.3
wartość prawdziwa (wielkości)
wartość zgodna z definicją wielkości określonej

UWAGA 1 Jest to wartość, jaką uzyskałoby się jako wynik bezbłędnego pomiaru.

UWAGA 2 Wartości prawdziwe są ze swej natury nieznane.

UWAGA 3 Może istnieć wiele wartości odpowiadających definicji danej wielkości określonej.

[VIM:1993, definicja 1.19]

Komentarz *Przewodnika*: Porównaj aneks D, w szczególności D.3.5, w którym wyjaśniono przyczyny nieużywania w *Przewodniku* terminu "wartość prawdziwa" i traktowania terminów "wartość prawdziwa menzurandu" (lub wielkości) i "wartość menzurandu" (lub wielkości) jako synonimy.

B.2.4
wartość umownie prawdziwa (wielkości)
wartość przypisana wielkości określonej i uznana, niekiedy umownie, jako wartość wyznaczona z niepewnością akceptowalną w danym zastosowaniu

PRZYKŁAD 1 W danym miejscu, wartość przypisana wielkości realizowanej przez wzorzec odniesienia może być uważana jako wartość umownie prawdziwa.

PRZYKŁAD 2 CODATA (1986) zaleciło następującą wartość dla stałej Avogadra: $6{,}022\,136\,7 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.

UWAGA 1 "Wartość umownie prawdziwa" jest niekiedy nazywana **wartością przypisaną, najlepszym oszacowaniem** wartości**, wartością umowną** lub **wartością odniesienia**. Terminu "wartość odniesienia" w tym znaczeniu nie należy mylić z terminem "wartość odniesienia" stosowanym w znaczeniu jak w uwadze do definicji 5.7 w VIM:1993.

UWAGA 2 W celu ustalenia wartości umownie prawdziwej wykorzystuje się często dużą liczbę wyników pomiaru.

[VIM:1993, definicja 1.20]

Komentarz *Przewodnika*: Patrz komentarz *Przewodnika* do B.2.3.

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Seria norm ISO 31 jest w trakcie przeglądu jako seria norm ISO 80000 i IEC 80000. (Niektóre z tych dokumentów są już opublikowane.)

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

B.2.5
pomiar
zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości

UWAGA Przebieg tych operacji może być zautomatyzowany.

[VIM:1993, definicja 2.1]

B.2.6
zasada pomiaru
naukowa podstawa pomiaru

PRZYKŁAD 1 Zjawisko termoelektryczne wykorzystane do pomiaru temperatury.

PRZYKŁAD 2 Zjawisko Josephsona wykorzystane do pomiaru napięcia elektrycznego.

PRZYKŁAD 3 Zjawisko Dopplera wykorzystane do pomiaru prędkości.

PRZYKŁAD 4 Zjawisko Ramana wykorzystane do pomiaru liczby falowej drgań molekularnych.

[VIM:1993, definicja 2.3]

B.2.7
metoda pomiarowa
logiczny ciąg wykonywanych podczas pomiaru operacji, opisanych w sposób ogólny

UWAGA Metody pomiarowe mogą być określane w różny sposób, np.

- metoda podstawienia
- metoda różnicowa
- metoda zerowa.

[VIM:1993, definicja 2.4]

B.2.8
procedura pomiarowa
zbiór operacji opisanych w sposób szczegółowy i realizowanych podczas wykonywania pomiarów zgodnie z daną metodą

UWAGA Procedura pomiarowa jest zazwyczaj opisana w dokumencie, który sam nosi nazwę "procedura pomiarowa" (albo **metoda pomiarowa**) i jest wystarczająco szczegółowy, aby operator mógł przeprowadzić pomiar bez potrzeby dodatkowych informacji.

[VIM:1993, definicja 2.5]

B.2.9
menzurand
wielkość określona, stanowiąca przedmiot pomiaru

PRZYKŁAD Ciśnienie pary danej próbki wody przy 20 °C.

UWAGA Określenie menzurandu może wymagać wskazania innych wielkości, takich jak czas, temperatura i ciśnienie.
[VIM:1993, definicja 2.6]

B.2.10
wielkość wpływająca
wielkość nie będąca menzurandem, ale która ma wpływ na wynik pomiaru

PRZYKŁAD 1 Temperatura mikrometru podczas pomiaru długości.

PRZYKŁAD 2 Częstotliwość podczas pomiaru amplitudy przemiennego napięcia elektrycznego.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

PRZYKŁAD 3 Stężenie bilirubiny podczas pomiaru stężenia hemoglobiny w próbce plazmy krwi ludzkiej.

[VIM:1993, definicja 2.7]

Komentarz *Przewodnika*: Uważa się, że definicja wielkości wpływającej zalicza do wielkości wpływających wartości związane z wzorcami, materiałami odniesienia i danymi odniesienia, od których może zależeć wynik pomiaru, a także zjawiska takie jak krótkookresowe fluktuacje właściwości przyrządów pomiarowych i wielkości takie jak temperatura otoczenia, ciśnienie atmosferyczne i wilgotność.

B.2.11
wynik pomiaru
wartość przypisana menzurandowi, uzyskana drogą pomiaru

UWAGA 1 Gdy podaje się wynik, należy wyraźnie zaznaczyć, czy dotyczy on:

- wskazania
- wyniku surowego
- wyniku poprawionego

i czy jest średnią uzyskaną z wielu obserwacji.

UWAGA 2 Całkowite wyrażenie wyniku pomiaru zawiera dane dotyczące niepewności pomiaru.

[VIM:1993, definicja 3.1]

B.2.12
wynik surowy
wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego

[VIM:1993, definicja 3.3]

B.2.13
wynik poprawiony
wynik pomiaru po korekcji błędu systematycznego

[VIM:1993, definicja 3.4]

B.2.14
dokładność pomiaru
stopień zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą menzurandu

UWAGA 1 Pojęcie "dokładności" ma charakter jakościowy.

UWAGA 2 Nie należy stosować terminu **precyzja** zamiast terminu "dokładność".

[VIM:1993, definicja 3.5]

Komentarz *Przewodnika*: Patrz Komentarz *Przewodnika* do B.2.3.

B.2.15
powtarzalność (wyników pomiarów)
stopień zgodności wyników kolejnych pomiarów tego samego menzurandu, wykonywanych w tych samych warunkach pomiarowych

UWAGA 1 Warunki te są nazywane **warunkami powtarzalności**.

UWAGA 2 Warunki powtarzalności obejmują:

- tę samą procedurę pomiarową,
- tego samego obserwatora,

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

- ten sam przyrząd pomiarowy stosowany w tych samych warunkach,
- to samo miejsce,
- powtarzanie w krótkich odstępach czasu.

UWAGA 3 Powtarzalność można wyrażać ilościowo za pomocą charakterystyk rozrzutu wyników.

[VIM:1993, definicja 3.6]

B.2.16
odtwarzalność (wyników pomiarów)
stopień zgodności wyników pomiarów tego samego menzurandu, wykonywanych w zmienionych warunkach pomiarowych

UWAGA 1 Aby wyrażenie odtwarzalności było jednoznaczne, należy określić wszystkie warunki podlegające zmianom.

UWAGA 2 Warunki podlegające zmianom mogą obejmować:

- zasadę pomiaru,
- metodę pomiaru,
- obserwatora,
- przyrząd pomiarowy,
- etalon odniesienia,
- miejsce,
- warunki stosowania,
- czas.

UWAGA 3 Odtwarzalność można wyrażać ilościowo za pomocą charakterystyk rozrzutu wyników.

UWAGA 4 Rozważane wyniki są zwykle wynikami poprawionymi.

[VIM:1993, definicja 3.7]

B.2.17
odchylenie standardowe eksperymentalne
parametr $s(q_k)$ charakteryzujący rozrzut wyników serii n pomiarów tego samego menzurandu, określony wzorem

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(q_j - \bar{q})^2}{n-1}}$$

w którym q_k oznacza wynik k-tego pomiaru, a $\bar{q}$ jest średnią arytmetyczną n rozważanych wyników

UWAGA 1 Traktując serię n wartości jako próbkę pobraną z populacji wartości o pewnym rozkładzie, można powiedzieć, że średnia $\bar{q}$ jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej μ_q, a $s^2(q_k)$ jest nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2 tego rozkładu.

UWAGA 2 Wyrażenie $s(q_k)/\sqrt{n}$ jest estymatorem odchylenia standardowego rozkładu zmiennej losowej $\bar{q}$ i jest nazywane **odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej**.

UWAGA 3 "Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej" bywa niekiedy nazywane niesłusznie **błędem standardowym średniej**.

UWAGA 4 Przyjęte z VIM:1993, definicja 3.8.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Komentarz *Przewodnika*: Niektóre z oznaczeń użytych w VIM zostały zmienione w celu osiągnięcia zgodności z oznaczeniami użytymi w podrozdziale 4.2 *Przewodnika*.

B.2.18
niepewność (pomiaru)
parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać menzurandowi

UWAGA 1 Takim parametrem może być, na przykład, odchylenie standardowe (lub jego wielokrotność), albo połowa szerokości przedziału odpowiadającego określonemu poziomowi ufności.

UWAGA 2 Niepewność pomiaru zawiera na ogół wiele składowych. Niektóre z nich można wyznaczyć na podstawie rozkładu statystycznego wyników szeregu pomiarów i można je scharakteryzować odchyleniem standardowym eksperymentalnym. Inne składowe, które mogą być również charakteryzowane odchyleniami standardowymi, wyznacza się na podstawie rozkładów prawdopodobieństwa opartych na doświadczeniu lub na innych informacjach.

UWAGA 3 Przyjmuje się, że wynik pomiaru stanowi najlepsze oszacowanie wartości menzurandu i że wszystkie składowe niepewności, włącznie z tymi, które pochodzą od efektów systematycznych, jak na przykład składowe związane z poprawkami lub z wzorcami odniesienia, wnoszą swój udział do rozrzutu.

[VIM:1993, definicja 3.9]

Komentarz *Przewodnika*: W VIM stwierdzono, że niniejsza definicja i uwagi są identyczne z zamieszczonymi w *Przewodniku* (patrz 2.2.3).

B.2.19
błąd (pomiaru)
różnica między wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą menzurandu

UWAGA 1 Ponieważ wartość prawdziwa nie może być określona, stosuje się w praktyce wartość umownie prawdziwą (patrz B.2.3 i B.2.4).

UWAGA 2 Jeżeli trzeba rozróżniać między "błędem" i "błędem względnym", to pierwszy bywa niekiedy nazywany **błędem bezwzględnym pomiaru**. Nie należy go mylić **z wartością bezwzględną błędu,** która jest modułem błędu.

[VIM:1993, definicja 3.10]

Komentarz *Przewodnika*: Jeżeli wynik pomiaru zależny od wartości wielkości innych niż menzurand, to błędy zmierzonych wartości tych wielkości wnoszą wkład do błędu wyniku pomiaru. Zobacz także Komentarz *Przewodnika* do B.2.22 i B.2.3.

B.2.20
błąd względny
stosunek błędu pomiaru do wartości prawdziwej menzurandu

UWAGA Ponieważ wartości prawdziwej nie można wyznaczyć, w praktyce stosuje się wartość umownie prawdziwą [patrz VIM:1993, definicje 1.19 (B.2.3) i 1.20 (B.2.4)].

[VIM:1993, definicja 3.12]

Komentarz *Przewodnika*: Patrz komentarz *Przewodnika* do B.2.3.

B.2.21
błąd przypadkowy
różnica między wynikiem pomiaru a średnią z nieskończonej liczby wyników pomiarów tego samego menzurandu, wykonanych w warunkach powtarzalności

UWAGA 1 Błąd przypadkowy jest równy błędowi pomiaru minus błąd systematyczny.

UWAGA 2 Ponieważ można wykonać tylko skończoną liczbę pomiarów, można więc dokonać jedynie oszacowania błędu przypadkowego.

[VIM:1993, definicja 3.13]

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Komentarz *Przewodnika*: Patrz Komentarz *Przewodnika* do B.2.22.

B.2.22
błąd systematyczny
różnica między średnią z nieskończonej liczby pomiarów tego samego menzurandu, wykonanych w warunkach powtarzalności, a wartością prawdziwą menzurandu

UWAGA 1 Błąd systematyczny jest równy błędowi minus błąd przypadkowy.

UWAGA 2 Podobnie jak wartość prawdziwa, błąd systematyczny i jego przyczyny nie mogą być znane dokładnie.

UWAGA 3 W odniesieniu do przyrządu pomiarowego, patrz "odchylenie" (VIM:1993, definicja 5.25).

[VIM:1993, definicja 3.14]

Komentarz *Przewodnika*: Błąd wyniku pomiaru (patrz B.2.19) może być często rozważany jako błąd pochodzący od pewnej liczby przypadkowych i systematycznych oddziaływań wnoszących własne składowe błędu do błędu wyniku pomiaru. Patrz także Komentarz *Przewodnika* do B.2.19 i do B.2.3.

B.2.23
poprawka
wartość dodana algebraicznie do surowego wyniku pomiaru w celu skompensowania błędu systematycznego

UWAGA 1 Poprawka jest równa wartości oszacowanego błędu systematycznego ze znakiem przeciwnym.

UWAGA 2 Ponieważ błąd systematyczny nie może być znany dokładnie, kompensacja nie może być zupełna.

[VIM:1993, definicja 3.15]

B.2.24
współczynnik poprawkowy
współczynnik liczbowy, przez który należy pomnożyć surowy wynik pomiaru, aby skompensować błąd systematyczny

UWAGA Ponieważ błąd systematyczny nie może być znany dokładnie, kompensacja nie może być zupełna.

[VIM:1993, definicja 3.16]

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks C

Podstawowe terminy i pojęcia statystyczne

C.1 Źródło definicji

Definicje podstawowych terminów statystycznych podanych w niniejszym aneksie pochodzą z Normy ISO 3534-1:1993* [7]. Tam też należy przede wszystkim szukać definicji terminów nie zamieszczonych w tym aneksie. Niektóre z tych terminów i stanowiące ich podstawę pojęcia zostały bardziej szczegółowo omówione w części C.3 aneksu, podczas gdy w części C.2 podano tylko ich formalne definicje, co ma to ułatwić korzystanie z *Przewodnika*. Część C.3, która zawiera także definicje pewnych terminów pokrewnych, nie jest bezpośrednio oparta na ISO 3534-1:1993.

C.2 Definicje

Podobnie jak w części B.2 aneksu B, ujęte w nawias słowa w nazwie pojęcia można opuścić, jeżeli ich pominięcie nie powoduje nieporozumień.

Terminy od C.2.1 do C.2.14 zdefiniowano w kategoriach właściwości populacji. Definicje terminów od C.2.15 do C.2.31 są związane z serią obserwacji (patrz pozycja [7]).

C.2.1
prawdopodobieństwo
liczba rzeczywista z przedziału od 0 do 1, związana ze zdarzeniem losowym

UWAGA Może być ono związane ze względną częstością występowania zdarzenia w długim okresie lub stopniem pewności, że zajdzie pewne zdarzenie. Dla wysokiego stopnia pewności prawdopodobieństwo jest bliskie jedności.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.1]

C.2.2
zmienna losowa
zmienna
zmienna, która może przybierać dowolną wartość z określonego zbioru i z którą związany jest *rozkład prawdopodobieństwa* [ISO 3534-1:1993, definicja 1.3 (C.2.3)]

UWAGA 1 Zmienna losowa, która może przyjmować tylko izolowane wartości nazywana jest zmienną "dyskretną". Zmienna losowa, która może przyjmować dowolną wartość ze skończonego lub nieskończonego przedziału nazywana jest zmienną "ciągłą".

UWAGA 2 Prawdopodobieństwo zdarzenia A oznacza się Pr(A) lub *P*(A).

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.2]

Komentarz *Przewodnika*: W Przewodniku używa się oznaczenia $\mathrm{Pr}(\mathrm{A})$, zamiast oznaczenia $P_{\mathrm{r}}(\mathrm{A})$ przyjętego w ISO 3534-1:1993.

C.2.3
rozkład prawdopodobieństwa (zmiennej losowej)
funkcja określająca prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmuje określoną wartość lub należy do określonego zbioru wartości

---

* **Przypis do wersji 2008:**

Norma ISO 3534-1:1993 została anulowana i zastąpiona przez normę ISO 3534-1:2006. Należy zauważyć, że niektóre terminy i definicje zostały zmienione. Więcej informacji można znaleźć w najnowszym wydaniu.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA Prawdopodobieństwo dla całego zbioru wartości zmiennej losowej jest równe 1.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.3]

C.2.4
dystrybuanta
funkcja określająca, dla każdej wartości x prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X będzie mniejsza lub równa wartości x:

$$F(x) = \Pr\left(X \le x\right)$$

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.4]

C.2.5
funkcja gęstości prawdopodobieństwa (dla zmiennej losowej ciągłej)
pochodna (jeżeli istnieje) dystrybuanty:

$$f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$$

UWAGA $f(x)\mathrm{d}x$ jest "elementem prawdopodobieństwa":

$$f(x)\mathrm{d}x = \Pr\,(x < X < x + \mathrm{d}x)$$

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.5]

C.2.6
funkcja prawdopodobieństwa
funkcja określająca, dla każdej wartości x_i zmiennej losowej dyskretnej X prawdopodobieństwo p_i, że zmienna losowa jest równa x_i:

$$p_i = \Pr\left(X = x_i\right)$$

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.6]

C.2.7
parametr
wielkość używana do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.12]

C.2.8
korelacja
zależność między dwiema lub kilkoma zmiennymi losowymi w rozkładzie dwóch lub więcej zmiennych losowych

UWAGA Większość statystycznych miar korelacji mierzy jedynie stopień zależności liniowej.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.13]

C.2.9
wartość oczekiwana (zmiennej losowej lub rozkładu prawdopodobieństwa)
średnia

1) Dla zmiennej losowej dyskretnej X przyjmującej wartości x_i z prawdopodobieństwami p_i wartość oczekiwana, jeżeli istnieje, jest równa

$$\mu = E\left(X\right) = \sum p_i x_i$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie wartości x_i, które możne przyjąć X.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

2) Dla zmiennej losowej ciągłej X, mającej funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ wartość oczekiwana, jeżeli istnieje, jest równa

$$\mu = E(X) = \int x\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

gdzie całkowanie przebiega w przedziale zmienności X.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.18]

C.2.10
zmienna losowa centrowana
zmienna losowa, której wartość oczekiwana równa jest zero

UWAGA Jeżeli zmienna losowa X ma wartość oczekiwaną równą μ, to odpowiadająca jej zmienna losowa centrowana jest równa $(X - \mu)$.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.21]

C.2.11
wariancja (zmiennej losowej lub rozkładu prawdopodobieństwa)
wartość oczekiwana kwadratu *zmiennej losowej centrowanej* [ISO 3534-1:1993, definicja 1.21 (C.2.10)]:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\}$$

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.22]

C.2.12
odchylenie standardowe (zmiennej losowej lub rozkładu prawdopodobieństwa)
dodatni pierwiastek kwadratowy z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.23]

C.2.13
moment centralny [2)] **rzędu** q
w jednowymiarowym rozkładzie prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana q-tej potęgi centrowanej zmiennej losowej $(X - \mu)$:

$$E\left[(X - \mu)^q\right]$$

UWAGA Moment centralny rzędu 2 jest *wariancją* [ISO 3534-1:1993, definicja 1.22 (C.2.11)] zmiennej losowej X.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.28]

C.2.14
rozkład normalny
rozkład Laplace'a-Gaussa
rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej X, mający funkcję gęstości prawdopodobieństwa równą

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

dla $-\infty < x < +\infty$.

2) Zastępując w definicji momentów wielkości X, $X–a$, Y, $Y–b$, itd. ich wartościami bezwzględnymi (modułami), tj. $|X|$, $|X–a|$, $|Y|$, $|Y–b|$ itd., definiuje się momenty bezwzględne, nazywane "momentami absolutnymi".

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA μ jest wartością oczekiwaną, a σ jest odchyleniem standardowym rozkładu normalnego.

[ISO 3534-1:1993, definicja 1.37]

C.2.15
właściwość
własność umożliwiająca identyfikację lub rozróżnianie jednostek w danej populacji

UWAGA Właściwość może być zarówno ilościowa (wyrażana za pomocą zmiennych) jak i jakościowa (wyrażana za pomocą atrybutów).

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.2]

C.2.16
populacja
zbiór wszystkich rozpatrywanych jednostek

UWAGA W przypadku zmiennej losowej uważa się, że *rozkład prawdopodobieństwa* [ISO 3534-1:1993 definicja 1.3 (C.2.3)] określa populację tej zmiennej.

[ISO 354-1:1993, definicja 2.3]

C.2.17
częstość
liczba wystąpień zdarzenia danego rodzaju lub liczba obserwacji należących do określonej klasy

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.11]

C.2.18
rozkład częstości
empiryczna zależność między wartościami właściwości i ich częstościami lub częstościami względnymi

UWAGA Rozkład może być przedstawiony graficznie jako *histogram* (ISO 3543-1:1993, definicja 2.17), *diagram słupkowy* (ISO 3534-1:1993, definicja 2.18), *wielobok częstości skumulowanej* (ISO 3534-1:1993, definicja 2.19) lub jako *tablica dwudzielcza* (ISO 3534-1:1993, definicja 2.22).

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.15]

C.2.19
średnia arytmetyczna
przeciętna
suma wartości dzielona przez liczbę wartości

UWAGA 1 Termin "średnia arytmetyczna" jest stosowany zwykle wtedy, kiedy dotyczy parametru populacji, a termin "średnia" wtedy, kiedy dotyczy wyniku obliczeń na podstawie danych otrzymanych z próby.

UWAGA 2 Średnia arytmetyczna z prostej próby losowej pobranej z populacji jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej w tej populacji. Jednakże czasami są stosowane inne estymatory, takie jak średnia geometryczna albo harmoniczna lub mediana albo moda.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.26]

C.2.20
wariancja
miara rozproszenia, będąca sumą kwadratów odchyleń obserwacji od ich wartości średniej podzielona przez liczbę obserwacji

PRZYKŁAD Dla n obserwacji $x_1, x_2, ..., x_n$, mających wartość średnią

$$\bar{x} = (1/n)\sum x_i$$

wariancja jest równa

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

UWAGA 1 Wariancja z próbki jest nieobciążonym estymatorem wariancji populacji.

UWAGA 2 Wariancja jest iloczynem $n/(n-1)$ i momentu centralnego rzędu 2 (patrz uwaga do ISO 3534-1:1993, definicja 2.39).

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.33]

Komentarz *Przewodnika*: Właściwszą nazwą zdefiniowanej tu wariancji byłoby "estymata wariancji populacji na podstawie próby". Wariancją z próby natomiast nazywa się zwykle moment centralny rzędu 2 z próby (patrz C.2.13 i C.2.22).

C.2.21
odchylenie standardowe
dodatni pierwiastek kwadratowy z wariancji

UWAGA Odchylenie standardowe próbki jest estymatorem odchylenia standardowego populacji

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.34]

C.2.22
moment centralny rzędu q
w rozkładzie jednej właściwości średnia arytmetyczna różnic między zaobserwowanymi wartościami i ich wartością średnią podniesionych do potęgi q:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^q$$

gdzie n jest liczbą obserwacji

UWAGA Moment centralny rzędu 1 jest równy zero.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.37]

C.2.23
statystyka
funkcja zmiennych losowych w próbie

UWAGA Statystyka, jako funkcja zmiennych losowych, jest także zmienną losową i może przyjmować różne wartości od próby do próby. Wartość statystyki, otrzymana na podstawie tej funkcji z wykorzystaniem zaobserwowanych wartości zmiennych losowych, może być użyta w teście statystycznym lub jako oszacowanie parametru populacji, takiego jak wartość średnia lub odchylenie standardowe.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.45]

C.2.24
estymacja
operacja mająca na celu przypisanie, na podstawie obserwacji w próbie, liczbowych wartości parametrom rozkładu wybranego jako model statystyczny populacji, z której ta próba została pobrana
UWAGA Wynik tej operacji może być wyrażony jako pojedyncza wartość [estymacja punktowa; patrz ISO 3534-1:1993, definicja 2.51 (C.2.26) lub jako estymacja przedziałowa [patrz ISO 3534-1:1993, definicja 2.57 (C.2.27) i 2.58 (C.2.28)].

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.49]

C.2.25
estymator
statystyka stosowana do estymacji parametru populacji

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.50]

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

C.2.26
estymata
wartość estymatora otrzymana w wyniku estymacji

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.51]

C.2.27
dwustronny przedział ufności
jeżeli T_1 i T_2 są funkcjami obserwacji zmiennej losowej takimi, że jeżeli θ jest parametrem populacji podlegającym oszacowaniu, a prawdopodobieństwo $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ jest co najmniej równe $(1 - \alpha)$ [gdzie $(1 - \alpha)$ jest ustaloną liczbą, dodatnią i mniejszą niż 1], to przedział między T_1 i T_2 jest dwustronnym przedziałem ufności θ dla poziomu ufności $(1 - \alpha)$.

UWAGA 1 Granice T_1 i T_2 przedziału ufności są *statystykami* [ISO 3534-1:1993, definicja 2.45 (C.2.23)] i jako takie zwykle przyjmują różne wartości od próby do próby.

UWAGA 2 W długiej serii prób względna częstość przypadków, w których wartość prawdziwa parametru populacji θ znajduje się w przedziale ufności, jest większa lub równa $(1 - \alpha)$.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.57]

C.2.28
jednostronny przedział ufności
jeżeli T jest funkcją obserwacji zmiennej losowej taką, że jeżeli θ jest parametrem populacji podlegającym oszacowaniu, a prawdopodobieństwo Pr $(T \geq \theta)$ [lub prawdopodobieństwo Pr $(T \leq \theta)$] jest co najmniej równe $(1 - \alpha)$ [gdzie $(1 - \alpha)$ jest ustaloną liczbą, dodatnią i mniejszą od 1], to przedział od najmniejszej możliwej wartości θ do T (lub przedział od T do największej możliwej wartości θ) jest jednostronnym przedziałem ufności θ dla poziomu ufności $(1 - \alpha)$.

UWAGA 1 Granica przedziału ufności T jest *statystyką* [ISO 3534-1:1993, definicja 2.45 (C.2.23)] i jako taka przyjmuje różne wartości od próby do próby.

UWAGA 2 Patrz uwaga 2 do ISO 3534-1:1993, definicja 2.57 (C.2.27).

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.58]

C.2.29
współczynnik ufności
poziom ufności
wartość prawdopodobieństwa $(1 - \alpha)$ związana z przedziałem ufności lub ze statystycznym przedziałem rozszerzenia [Patrz ISO 3534-1:1993, definicja 2.57 (C.2.27), 2.58 (C.2.28) i 2.61 (C.2.30).]

UWAGA Wartość $(1 - \alpha)$ wyraża się często w procentach.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.59]

C.2.30
statystyczny przedział rozszerzenia
przedział, o którym można twierdzić dla danego poziomu ufności, że zawiera co najmniej określoną część populacji

UWAGA 1 Jeśli obie granice przedziału są określone przez statystyki, to przedział jest dwustronny. Jeżeli zaś jedna z granic jest nieskończona lub pokrywa się z granicą zmiennej, to przedział jest jednostronny.

UWAGA 2 Przedział ten nazywany jest również "statystycznym przedziałem tolerancji". Termin ten nie powinien jednak być używany, ponieważ może być mylony z "przedziałem tolerancji", który jest zdefiniowany w ISO 3534-2:1993.

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.61]

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

C.2.31
stopnie swobody
ogólnie, liczba składników sumy minus liczba więzów nałożonych na te składniki

[ISO 3534-1:1993, definicja 2.85]

C.3 Wyjaśnienie terminów i pojęć

C.3.1 Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwaną funkcji $g(z)$ zmiennej losowej z o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(z)$ definiuje się jako

$$E\left[g(z)\right] = \int g(z)\ p(z)\,\mathrm{d}z$$

gdzie, z definicji $p(z), \int p(z)\,\mathrm{d}z = 1$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej z, oznaczona przez μ_z, a nazywana także wartością średnią zmiennej z, jest dana wyrażeniem

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z\ p(z)\,\mathrm{d}z$$

Estymatorem μ_z jest średnia arytmetyczna $\bar{z}$ n niezależnych obserwacji z_i zmiennej losowej z, której funkcją gęstości prawdopodobieństwa jest $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 Wariancja

Wariancja zmiennej losowej jest wartością oczekiwaną kwadratu odchylenia tej zmiennej od jej wartości oczekiwanej. Tak więc wariancja zmiennej losowej z o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(z)$ jest dana wyrażeniem

$$\sigma^2(z) = \int \left(z - \mu_z\right)^2\ p(z)\,\mathrm{d}z$$

gdzie μ_z jest wartością oczekiwaną z. Wariancja $\sigma^2(z)$ może być oszacowana z

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \text{, gdzie } \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

a z_i oznacza i-tą z n niezależnych obserwacji zmiennej losowej z.

UWAGA 1 Współczynnik $(n-1)$ w wyrażeniu określającym $s^2(z_i)$ wynika z korelacji między z_i i $\bar{z}$ oraz odzwierciedla fakt, że w zbiorze $\{z_i - \bar{z}\}$ istnieje tylko $(n-1)$ niezależnych jednostek obserwacji.

UWAGA 2 Jeżeli wartość oczekiwania μ_z zmiennej z jest znana, to estymata wariancji ma postać

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2$$

Właściwą miarą niepewności wyniku pomiaru jest raczej wariancja średniej arytmetycznej, czyli średniej obserwacji niż wariancja pojedynczej obserwacji. Wariancja zmiennej z powinna być wyraźnie odróżniana od wariancji średniej $\bar{z}$. Wariancja średniej arytmetycznej serii n niezależnych obserwacji z_i zmiennej losowej z jest dana wyrażeniem $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z)/n$, a jej oszacowaniem jest wariancja eksperymentalna średniej

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe jest dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z wariancji. Podczas gdy niepewność standardową typu A wyznacza się jako pierwiastek kwadratowy ze statystycznie oszacowanej wariancji, to często określając niepewność standardową typu B, wygodniej jest najpierw obliczyć niestatystyczny odpowiednik odchylenia standardowego, a następnie wyznaczyć odpowiednik wariancji podnosząc do kwadratu odchylenie standardowe.

C.3.4 Kowariancja

Kowariancja dwóch zmiennych losowych jest miarą ich wzajemnej zależności. Kowariancję zmiennych losowych y i z definiuje się jako

$$\mathrm{cov}(y, z) = \mathrm{cov}(z, y) = E\left\{\left[y - E(y)\right]\left[z - E(z)\right]\right\}$$

co prowadzi do

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(y, z) &= \mathrm{cov}(z, y) \\ &= \iint (y - \mu_y)(z - \mu_z)\, p(y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ &= \iint y\, z\, p(y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z - \mu_y \mu_z\end{aligned}$$

gdzie $p(y, z)$ jest dwuwymiarową funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennych y i z. Kowariancja $\mathrm{cov}(y, z)$ [oznaczana także $\upsilon(y, z)$] może być szacowana przez $s(y_i, z_i)$, wyznaczane na podstawie n niezależnych par obserwacji y_i i z_i zmiennych y i z

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

gdzie

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

UWAGA Oszacowaniem kowariancji dwóch średnich $\bar{y}$ i $\bar{z}$ jest $s(\bar{y}, \bar{z}) = s(y_i, z_i)/n$.

C.3.5 Macierz kowariancji

Dla wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa macierz $\boldsymbol{V}$, której elementy są równe wariancjom i kowariancjom zmiennych, nazywa się macierzą kowariancji. Elementy diagonalne macierzy $\upsilon(z, z) \equiv \sigma^2(z)$ lub $s(z_i, z_i) \equiv s^2(z_i)$ są wariancjami, zaś elementy pozadiagonalne macierzy $\upsilon(y, z)$ lub $s(y_i, z_i)$ są kowariancjami.

C.3.6 Współczynnik korelacji

Współczynnik korelacji jest miarą względnej wzajemnej zależności dwóch zmiennych, równy stosunkowi kowariancji tych zmiennych do dodatniego pierwiastka kwadratowego z iloczynu ich wariancji

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$\rho(y,z)=\rho(z,y)=\frac{\upsilon(y,z)}{\sqrt{\upsilon(y,y)\,\upsilon(z,z)}}=\frac{\upsilon(y,z)}{\sigma(y)\,\sigma(z)}$$

Estymatą współczynnika korelacji jest

$$r(y_i,z_i)=r(z_i,y_i)=\frac{s(y_i,z_i)}{\sqrt{s(y_i,y_i)s(z_i,z_i)}}=\frac{s(y_i,z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

Współczynnik korelacji jest liczbą $-1 \le \rho \le +1$ lub $-1 \le r(y_i, z_i) \le +1$.

UWAGA 1 Ponieważ ρ i r są liczbami zawartymi w przedziale od –1 do +1, podczas gdy kowariancje są zwykle wielkościami posiadającymi niewygodne w stosowaniu wymiary fizyczne i wartości liczbowe, to w praktyce bardziej użyteczne są współczynniki korelacji niż kowariancje.

UWAGA 2 Dla wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa, zamiast macierzy kowariancji podaje się zwykle macierz współczynników korelacji. Ponieważ $\rho(y, y) = 1$ i $r(y_i, y_i) = 1$, to elementy diagonalne macierzy są równe jedności.

UWAGA 3 Jeżeli estymaty wartości wielkości wejściowych x_i i x_j są skorelowane (patrz 5.2.2) i jeżeli zmiana δ_i estymaty x_i wywołuje zmianę δ_j estymaty x_j, to współczynnik korelacji x_i i x_j można w przybliżeniu oszacować przez

$$r(x_i,x_j)\approx u(x_i)\delta_j\Big/\left[u(x_j)\delta_i\right]$$

Związek ten może służyć za podstawę eksperymentalnego oszacowania współczynników korelacji. Można także korzystać z niego do obliczania przybliżonej zmiany estymaty wartości wielkości wejściowej spowodowanej zmianą estymaty wartości innej wielkości wejściowej, jeżeli znany jest współczynnik ich korelacji.

C.3.7 Niezależność

Dwie zmienne losowe są statystycznie niezależne, jeżeli ich wspólny rozkład prawdopodobieństwa jest iloczynem ich jednowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa.

UWAGA Jeżeli dwie zmienne losowe są niezależne, to ich kowariancja i współczynnik korelacji wynoszą zero, ale z zerowych ich wartości nie wynika niezależność zmiennych.

C.3.8 Rozkład *t*-Studenta

Rozkład *t*-Studenta jest rozkładem prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej t, której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma postać

$$p(t,\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2},\quad -\infty<t<+\infty$$

gdzie Γ jest funkcją gamma, a $\nu > 0$. Wartość oczekiwana zmiennej o tym rozkładzie jest równa zero, a jej wariancja jest równa $\nu/(\nu-2)$ dla $\nu > 2$. Jeżeli $\nu \to \infty$, to rozkład Studenta dąży do rozkładu normalnego o $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ (patrz C.2.14).

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $(\bar{z}-\mu_z)/s(\bar{z})$ jest rozkładem *t*-Studenta, jeżeli zmienna losowa z ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ_z, a $\bar{z}$ oznacza średnią arytmetyczną n niezależnych obserwacji z_i zmiennej z, $s(z_i)$ jest odchyleniem standardowym eksperymentalnym pojedynczej obserwacji, zaś $s(\bar{z})=s(z_i)/\sqrt{n}$ oznacza odchylenie standardowe eksperymentalne średniej $\bar{z}$ z $\nu = n-1$ stopniami swobody.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks D

Wartość "prawdziwa", błąd i niepewność

Termin **wartość prawdziwa** (B.2.3) jest tradycyjnie używany w publikacjach dotyczących niepewności, nie stosuje się go natomiast w *Przewodniku* z powodów przedstawionych w tym aneksie. Ponieważ terminy "menzurand", "błąd" i "niepewność" są często pojmowane w sposób niewłaściwy, to aby uzupełnić rozważania rozdziału 3, w aneksie tym zamieszczono dodatkowe omówienie idei leżących u podstaw tych terminów. Przedstawiono dwa rysunki wyjaśniające, dlaczego pojęcie niepewności przyjęte w tym *Przewodniku* jest oparte na wyniku pomiaru i jego niepewności, a nie na niepoznawalnej wartości „prawdziwej" i błędzie.

D.1 Menzurand

D.1.1 Pierwszym krokiem do wykonania pomiaru jest określenie menzurandu – wielkości, która ma być zmierzona. Menzurand nie może być określony przez wartość, ale jedynie przez opis wielkości. Jednakże, zasadniczo, menzurandu nie można opisać w sposób *kompletny* za pomocą ograniczonej ilości informacji. Zatem, w stopniu pozostawiającym miejsce na interpretację, niepełna definicja menzurandu wprowadza do niepewności wyniku pomiaru składową, która może być lub też nie być, znaczącą dla wymaganej dokładności pomiaru.

D.1.2 Definicja menzurandu wyszczególnia zwykle pewne stany i warunki fizyczne.

PRZYKŁAD Prędkość dźwięku w suchym powietrzu o składzie (ułamek molowy) N_2 = 0,780 8, 0_2 = 0,209 5, Ar = 0,009 35 i CO_2 = 0,000 35 w temperaturze T = 273,15 K i ciśnieniu p = 101 325 Pa.

D.2 Wielkość realizowana

D.2.1 W przypadku idealnym wielkość realizowana w pomiarze powinna być całkowicie zgodna z definicją menzurandu. Często jednak wielkość taka nie może być zrealizowana i mierzy się wielkość będącą jedynie przybliżeniem menzurandu.

D.3 Wartość "prawdziwa" i wartość poprawiona

D.3.1 Wynik pomiaru wielkości realizowanej koryguje się ze względu na różnicę między tą wielkością a menzurandem, w celu prognozowania wyniku pomiaru w sytuacji, gdy wielkość realizowana całkowicie spełniałaby definicję menzurandu. Wynik pomiaru koryguje się także ze względu na wszystkie inne uznane za znaczące oddziaływania systematyczne. Chociaż końcowy poprawiony wynik jest czasem uważany za najlepsze oszacowanie wartości "prawdziwej" menzurandu, to w rzeczywistości jest on po prostu najlepszym oszacowaniem wartości wielkości, którą zamierzano zmierzyć.

D.3.2 Przypuśćmy na przykład, że menzurandem jest grubość danego arkusza materiału w określonej temperaturze. Obiekt badany przenosi się do miejsca o temperaturze zbliżonej do wymaganej i mierzy się w określonym miejscu za pomocą mikrometru jego grubość. Grubość arkusza materiału w danym miejscu i w danej temperaturze i przy nacisku wywołanym przez mikrometr jest wielkością zrealizowaną.

D.3.3 Temperatura materiału podczas pomiaru oraz nacisk wywierany przez mikrometr są określone. Surowy wynik pomiaru wielkości zrealizowanej koryguje się biorąc pod uwagę krzywą wzorcowania mikrometru, odstępstwo temperatury od temperatury określonej oraz odkształcenie materiału spowodowane naciskiem mikrometru.

D.3.4 Wynik poprawiony można nazwać najlepszym oszacowaniem wartości "prawdziwej". "Prawdziwej" w tym sensie, że jest to wartość wielkości, którą uważa się za całkowicie spełniającą definicję menzurandu. Gdyby jednak pomiaru grubości dokonano w innym miejscu arkusza materiału, to wielkość zrealizowana jak również wielkość "prawdziwa" mogłaby być inna. Jednakże ta wartość "prawdziwa" byłaby zgodna z definicją menzurandu, ponieważ definicja nie określała miejsca, w którym ma być zmierzona grubość arkusza. W opisanym przypadku, z powodu niekompletnej definicji menzurandu, wartość "prawdziwa" jest obarczona niepewnością, którą można wyznaczyć na podstawie pomiarów wykonanych w różnych miejscach arkusza.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

W pewnym stopniu, każdy menzurand jest obarczony tego rodzaju "wewnętrzną" niepewnością, którą w zasadzie można w ten czy inny sposób określić. Jest to minimalna niepewność, a pomiar obarczony taką niepewnością można uznać za najlepszy możliwy pomiar menzurandu. Otrzymanie wartości danej wielkości obarczonej mniejszą niepewnością wymaga bardziej kompletnej definicji menzurandu.

UWAGA 1 Określenie menzurandu w niniejszym przykładzie pozostawia wiele wątpliwości co do innych czynników mogących mieć wpływ na grubość, takich jak: ciśnienie atmosferyczne, wilgotność, położenie arkusza w polu grawitacyjnym, sposób jego podtrzymywania itp.

UWAGA 2 Chociaż menzurand powinien być zdefiniowany wystarczająco szczegółowo, tak aby niepewność związana z niepełną jego definicją była zaniedbywalna w stosunku do wymaganej dokładności pomiaru, to trzeba zauważyć, że nie zawsze byłoby to praktyczne. Definicja może być niepełna, bo nie określa na przykład parametrów, o których bezpodstawnie założono, że wywołują wpływy zaniedbywalne lub też ustala warunki, których nie można całkowicie spełnić i których niedoskonała realizacja powoduje wpływy trudne do oceny. I tak w przykładzie z D.1.2, prędkość dźwięku implikuje istnienie fali płaskiej o wolno zanikającej amplitudzie. W stopniu takim, z jakim pomiar nie spełnia tych warunków, powinno się wziąć pod uwagę dyfrakcje i nieliniowości.

UWAGA 3 Nieodpowiednia specyfikacja menzurandu może prowadzić do rozbieżności między wynikami pomiarów pozornie tej samej wielkości wykonanych w różnych laboratoriach.

D.3.5 W *Przewodniku* unika się terminu "wartość prawdziwa menzurandu" lub wielkości (często redukowanego do "wartości prawdziwej"), ponieważ wyraz "prawdziwa" uważany jest za zbyteczny. "Menzurand" (patrz B.2.9) oznacza "określoną wielkość poddaną pomiarowi" stąd "wartość menzurandu" znaczy "wartość określonej wielkości poddanej pomiarowi". Ponieważ "określona wielkość" rozumie się ogólnie jako wielkość zdefiniowaną (por. B.2.1, uwagi 1), przymiotnik "prawdziwa" w określeniu "prawdziwa wartość menzurandu" (lub "prawdziwa wartość wielkości") jest niepotrzebny – "prawdziwa" wartość menzurandu (lub wielkości) jest po prostu wartością menzurandu (lub wielkości). Ponadto, jak pokazano wyżej, oryginalna "prawdziwa" wartość jest jedynie wyidealizowanym pojęciem.

D.4 Błąd

Poprawiony wynik pomiaru nie jest wartością menzurandu, jest on obarczony błędem wynikającym z niedoskonałości pomiaru realizowanej wielkości powodowanym przypadkowymi zmianami wyników obserwacji (oddziaływania przypadkowe), nieodpowiednim wyznaczeniem poprawek błędów wywołanych oddziaływaniami systematycznymi oraz niepełną znajomością niektórych zjawisk fizycznych (także oddziaływań systematycznych). Ani wartość realizowanej wielości, ani też wartość menzurandu nie mogą być dokładnie znane, mogą być jedynie znane oszacowania tych wartości. W podanym wyżej przykładzie mierzona grubość arkusza *może* być obarczona błędem, to jest może różnić się od wartości menzurandu (grubość arkusza), ponieważ każdy z podanych niżej czynników może wprowadzić do wyniku pomiaru nieznany błąd:

a) nieznaczne różnice między wskazaniami mikrometru podczas kolejnych pomiarów tej samej realizowanej wielkości,

b) niedoskonałe wzorcowanie mikrometru,

c) niedoskonałość pomiaru temperatury i zastosowanego nacisku,

d) niepełna znajomość wpływu temperatury, ciśnienia atmosferycznego i wilgotności na próbkę i mikrometr lub obu.

D.5 Niepewność

D.5.1 Podczas gdy dokładne wartości składowych błędu wyniku pomiaru są nieznane i niepoznawalne, to *niepewności* związane z oddziaływaniami przypadkowymi i systematycznymi, powodującymi powstawanie błędu, można wyznaczyć. Nawet jednak, gdy wyznaczone niepewności są małe, to ciągle nie ma gwarancji, że błąd wyniku pomiaru jest mały, ponieważ podczas określania poprawki lub oceny stopnia nieznajomości zjawiska, pewne oddziaływania systematyczne mogą być pominięte, gdyż nie zostały rozpoznane. Zatem niepewność wyniku pomiaru niekoniecznie jest wskazaniem prawdopodobieństwa, że wynik pomiaru jest bliski wartości menzurandu; jest ona po prostu estymatą prawdopodobieństwa bliskości do najlepszej wartości, zgodnej z obecnie posiadaną wiedzą.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

D.5.2 Niepewność pomiaru jest więc wyrażeniem faktu, że dla danego menzurandu i danego wyniku pomiaru tej wielkości, istnieje nie jedna wartość, a nieskończenie wiele wartości rozproszonych wokół wyniku, które są zgodne z obserwacjami, danymi i znajomością praw natury i które z różnym stopniem wiarygodności mogą zostać przypisane menzurandowi.

D.5.3 Na szczęście, w wielu faktycznie wykonywanych pomiarach wiele dyskutowanych tu zjawisk nie występuje. Zdarzają się sytuacje, gdy menzurand jest wystarczająco dobrze zdefiniowany, gdy wzorce i przyrządy są wzorcowane przy użyciu wzorców odniesienia powiązanych z wzorcami krajowymi i gdy niepewności wyznaczonych poprawek są nieznaczne w porównaniu z niepewnościami powstającymi w wyniku oddziaływań przypadkowych na wskazanie przyrządu lub w wyniku ograniczonej liczby obserwacji (patrz E.4.3). Mimo wszystko, niepełna wiedza o wielkościach wpływających i skutkach ich oddziałania często stanowi znaczącą składową niepewności wyniku pomiaru.

D.6 Interpretacja graficzna

D.6.1 Rysunek D.1 przedstawia graficznie pojęcia rozważane w rozdziale 3 *Przewodnika* i w aneksie D. Wyjaśnia, dlaczego *Przewodnik* koncentruje się na niepewności, a nie na błędzie. Prawdziwa wartość błędu wyniku pomiaru jest na ogół nieznana i niewyznaczalna. Można jedynie oszacować wartości wielkości wejściowych, łącznie z poprawkami ze względu na wpływy rozpoznanych oddziaływań systematycznych wraz z ich niepewnościami standardowymi (oszacowanymi odchyleniami standardowymi). Oszacowania te można wykonać albo z nieznanych rozkładów prawdopodobieństwa, na podstawie ich prób w postaci powtarzanych obserwacji, albo z *a priori* danych rozkładów prawdopodobieństwa przyjętych na podstawie zasobów dostępnych informacji. Wynik pomiaru można obliczyć z oszacowanych wartości wielkości wejściowych, a niepewność standardową złożoną wyniku z niepewności standardowych tych wartości. Jedynie, gdy istnieje solidna podstawa do przekonania, że powyższe działania zostały wykonane właściwie i nie pominięto żadnego ze znaczących oddziaływań systematycznych, można twierdzić, że wynik pomiaru jest wiarygodną estymatą wartości mezurandu i że niepewność złożona wyniku jest wiarygodną miarą jego *możliwego* błędu.

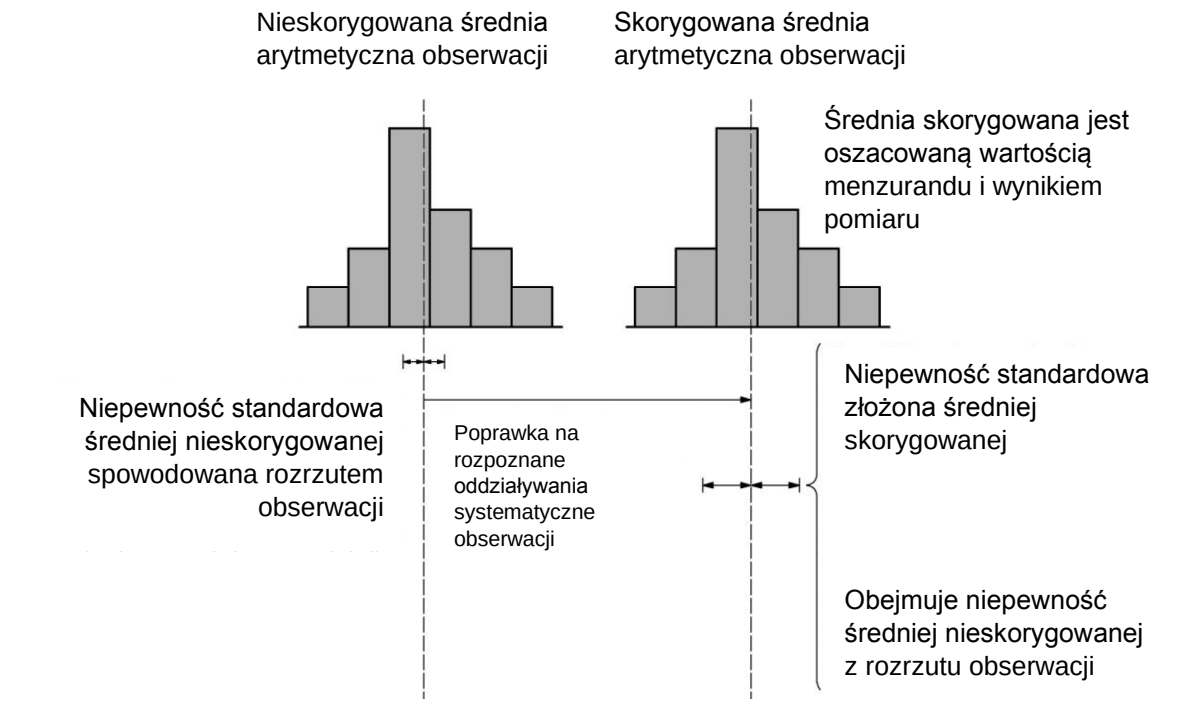
UWAGA 1 Na rys. D.1 a), w celu lepszej ilustracji obserwacji, przedstawiono je w postaci histogramu (patrz 4.4.3 i rys. 1b).

UWAGA 2 Poprawka błędu jest równa estymacie błędu z przeciwnym znakiem. Tak więc na rys. D.1 i na rys. D.2 strzałka ilustrująca poprawkę błędu jest równa co do długości, lecz przeciwnie skierowana niż strzałka, która ilustrowałaby sam błąd. Zamieszczony przy rysunku tekst wyjaśnia, czy dana strzałka ilustruje poprawkę czy błąd.

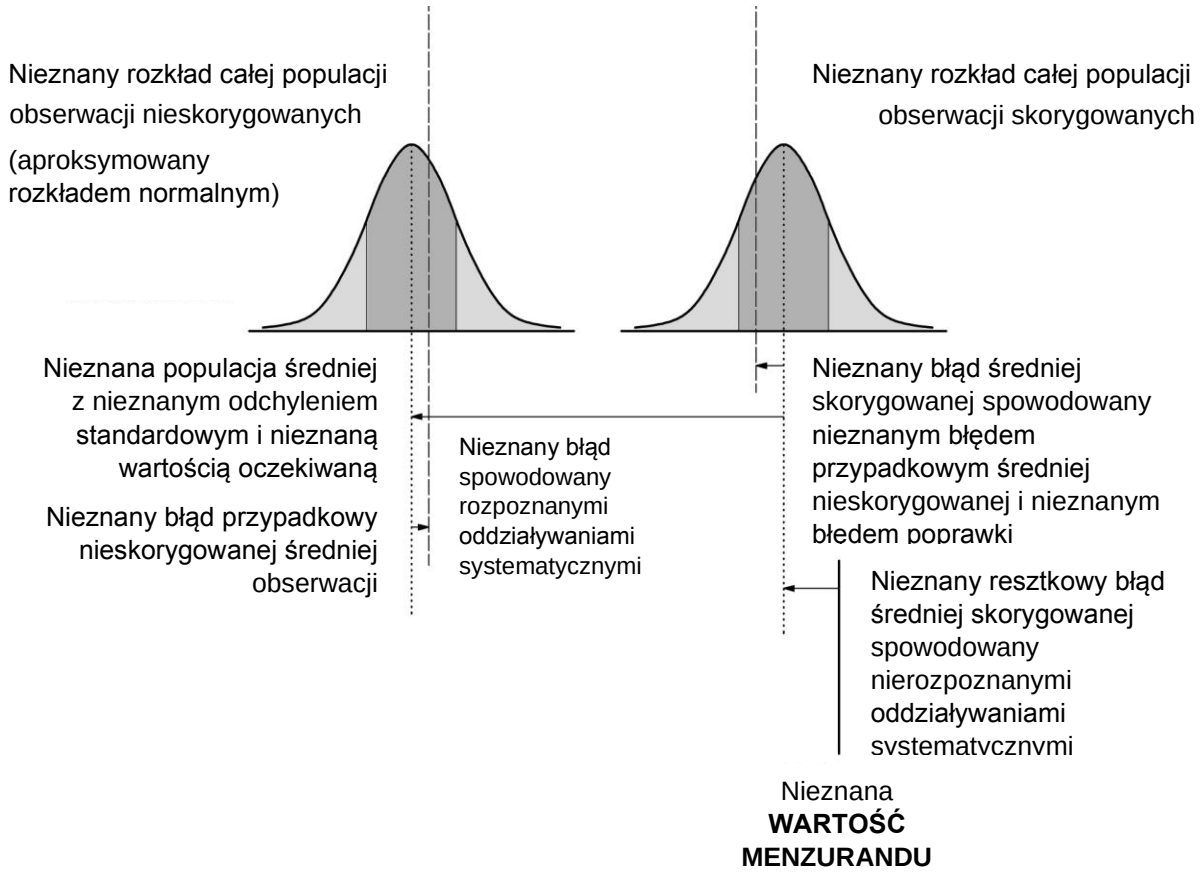
D.6.2 Rysunek D.2 obrazuje niektóre z pojęć przedstawionych na rys. D.1, ale czyni to w inny sposób. Ponadto obrazuje on także ideę, że może istnieć wiele wartości mezurandu, jeżeli definicja mezurandu jest niepełna [poziom *g*) rys. D.2]. Niepewność powstająca w wyniku niepewności definicji mierzona wariancją jest wyznaczana z pomiarów wielokrotnych realizacji mezurandu, przy użyciu tej samej metody, przyrządów itp. (patrz D.2.4).

UWAGA W kolumnie zatytułowanej "Wariancja", wariancje są rozumiane jako wariancje $u_i^2(y)$ zdefiniowane równaniem (11) w 5.1.3. W związku z tym dodają się one liniowo, jak pokazano na rysunku.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone



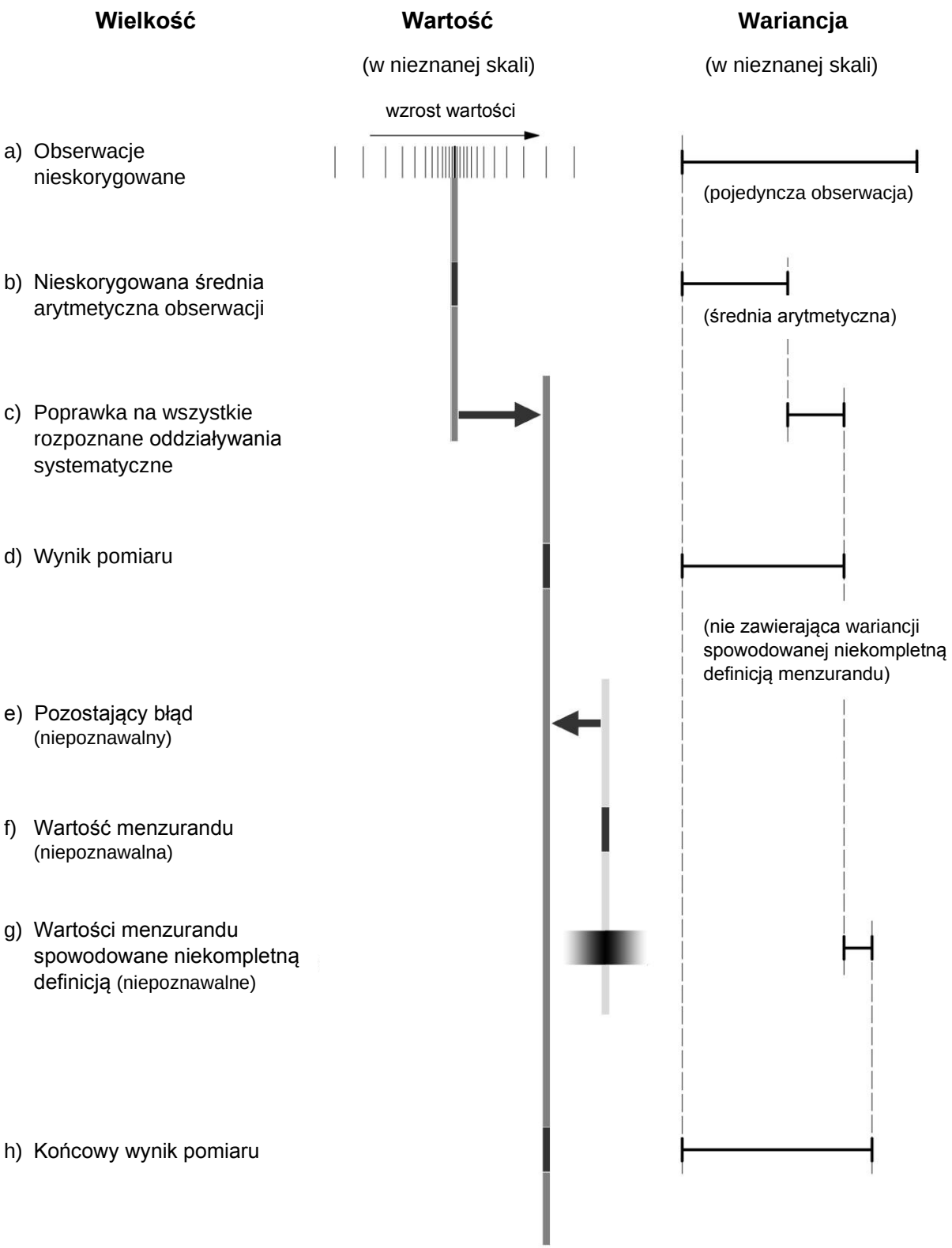
a) Pojęcia oparte na wielkościach obserwowalnych



b) Pojęcia idealne oparte na wielkościach niepoznawalnych

Rys. D.1 – Graficzne przedstawienie pojęć wartości, błędu i niepewności

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone



Rys. D.2 – Graficzne przedstawienie pojęć wartości, błędu i niepewności

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks E

Motywacja i podstawy Zalecenia INC-1 (1980)

Aneks E podaje krótkie uzasadnienie motywacji i podstaw statystycznych Zalecenia INC-1 (1980), opracowanego przez Grupę Roboczą ds. Wyrażania Niepewności, na którym oparty jest *Przewodnik*. Dodatkowe informacje można znaleźć w literaturze [1, 2, 11, 12].

E.1 "Bezpieczny", "przypadkowy" i "systematyczny"

E.1.1 *Przewodnik* przedstawia szeroko stosowalną metodę wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru. Daje ona raczej realistyczną niż "bezpieczną" wartość niepewności opartą na założeniu, że nie istnieje podstawowa różnica między składową niepewności pochodzącą od oddziaływań przypadkowych i pochodzącą od poprawki ze względu na oddziaływania systematyczne (patrz 3.2.2 i 3.2.3). Dlatego też proponowana metoda różni się od pewnych starszych metod opartych na dwóch ogólnych założeniach, omówionych poniżej.

E.1.2 Pierwsze założenie to wymaganie, aby podawana niepewność była "bezpieczna" lub "ostrożna", co oznacza, że w żadnym wypadku nie powinna być zbyt mała. W rzeczywistości, ponieważ wyznaczanie niepewności wyniku pomiaru jest problematyczne, była ona często celowo zawyżana.

E.1.3 Drugie założenie to możliwość podziału czynników powodujących powstanie niepewności na "przypadkowe" lub "systematyczne", a więc będące różnej natury. Niepewności związane z każdą grupą czynników powinny być składane w jej właściwy sposób i podawane oddzielnie (lub łączone w specjalny sposób, gdy wymagana jest jedna liczba określająca niepewność). W rzeczywistości metoda składania niepewności była często tworzona pod kątem zapewnienia wymaganego bezpieczeństwa.

E.2 Uzasadnienie realistycznego wyznaczania niepewności

E.2.1 Podając wartość menzurandu, należy podać najlepszą estymatę jego wartości oraz najlepiej wyznaczoną niepewność tej estymaty, ponieważ przy niepewności obarczonej błędem nie ma praktycznie możliwości ustalenia czy błąd jej zwiększa, czy zmniejsza "bezpieczeństwo" oszacowania. Zbyt niskie oszacowanie niepewności może spowodować nadmierne zaufanie do podanej wartości i przynieść niepożądane lub nawet zgubne następstwa. Rozmyślne zawyżenie niepewności może także spowodować niepożądane następstwa. Może ono skłonić użytkowników aparatury pomiarowej do zakupu przyrządów bardziej kosztownych, niż to wynika z potrzeb, spowodować niepotrzebne odrzucenie kosztownych produktów lub rezygnację z usług laboratoriów wykonujących wzorcowanie.

E.2.2 Nie znaczy to, że ten, kto korzysta z wyniku pomiaru, nie może stosować własnego mnożnika podawanej niepewności, w celu otrzymania niepewności rozszerzonej, która wyznacza przedział o określonym poziomie ufności odpowiednim do jego potrzeb. Nie znaczy to również, że instytucje dostarczające wyniki pomiarów, nie mogą w pewnych warunkach stosować rutynowo współczynnika, który zapewnia otrzymanie podobnej niepewności rozszerzonej, spełniającej wymagania szczególnej grupy użytkowników tych wyników. Jednakże taki współczynnik (zawsze powinien on być podany) musi być zastosowany do niepewności wyznaczonej w sposób realistyczny i tylko po określeniu niepewności w taki sposób, że przedział wyznaczony przez niepewność rozszerzoną, ma wymagany poziom ufności i że działanie to może być łatwo odwrócone.

E.2.3 Mierzący musi często włączać do swojej analizy wyniki pomiarów, wykonanych przez innych, obarczone własnymi niepewnościami. Wyznaczając niepewności wyników swoich pomiarów, potrzebuje on dysponować najlepszą wartością, a nie wartością "bezpieczną", niepewności wyników włączanych z zewnątrz. Poza tym musi istnieć logiczny i prosty sposób łączenia niepewności wyników, pochodzących z innych źródeł z niepewnościami własnych obserwacji, w celu otrzymania całkowitej niepewności. Zalecenie INC-1 (1980) podaje taki sposób.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

E.3 Uzasadnienie identycznego traktowania wszystkich składowych niepewności

Centralnym elementem rozważań niniejszego podrozdziału jest przykład pokazujący, jak *Przewodnik*, przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru, jednakowo traktuje składowe niepewności wynikające z wpływów przypadkowych i z poprawek ze względu na oddziaływania systematyczne. Przedstawiono punkt widzenia przyjęty w *Przewodniku* i przytoczony w E.1.1, sprowadzający się do założenia, że wszystkie składowe niepewności posiadają tę samą naturę i powinny być traktowane identycznie. Początkiem rozważań jest uproszczone wyprowadzenie formuły matematycznej opisującej propagację odchylenia standardowego, nazywanej w *Przewodniku* prawem propagacji niepewności.

E.3.1 Niech wielkość wyjściowa $z = f(w_1, w_2, ..., w_N)$ zależy od N wielkości wejściowych w_1, w_2, ..., w_N, przy czym w_i jest opisane przez odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa. Rozwinięcie f w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych $E(w_i) \equiv \mu_i$ wielkości w_i daje w pierwszym przybliżeniu dla małych odchyleń z od μ_i następujące wyrażenie

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \tag{E.1}$$

gdzie $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$ i zakłada się, że wyrażenia wyższych rzędów są zaniedbywalne. Kwadrat odchylenia $z - \mu_z$ jest stąd dany

$$(z - \mu_z)^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \right]^2 \tag{E.2a}$$

co można zapisać

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i} \right]^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} (w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \tag{E.2b}$$

Wartość oczekiwana kwadratu odchylenia $(z - \mu_z)^2$ jest wariancją z, czyli $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$. Zatem równanie (E.2b) prowadzi do

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i} \right]^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{E.3}$$

W powyższym równaniu $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ jest wariancją zmiennej w_i a $\rho_{ij} = \upsilon(w_i, w_j) \big/ (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ jest współczynnikiem korelacji w_i i w_j, gdzie $\upsilon(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ jest kowariancją w_i i w_j.

UWAGA 1 σ_z^2 i σ_i^2 są momentami centralnymi rzędu 2 (patrz C.2.13 i C.2.22), odpowiednio rozkładu prawdopodobieństwa z i w_i. Rozkład prawdopodobieństwa może być scharakteryzowany całkowicie za pomocą wartości oczekiwanej, wariancji i momentów centralnych wyższego rzędu.

UWAGA 2 Równanie (13) z 5.2.2 [razem z równaniem (15)], wykorzystywane do obliczania niepewności standardowej złożonej, jest identyczne z równaniem (E.3), z zastrzeżeniem, że równanie (13) jest wyrażone za pomocą estymat wariancji, odchyleń standardowych i współczynników korelacji.

E.3.2 W terminologii tradycyjnej równanie (E.3) jest często nazywane "ogólnym prawem propagacji błędu". Nazwa ta lepiej stosuje się do wyrażenia o postaci $\Delta z = \sum_{i=1}^{N} (\partial f / \partial w_i) \Delta w_i$, gdzie Δz jest zmianą z spowodowaną (małymi) zmianami Δw_i wielkości w_i [patrz równanie (E.8)]. W rzeczywistości, właściwiej jest nazwać równanie (E.3) prawem propagacji niepewności, jak też uczyniono w *Przewodniku*, ponieważ pokazuje

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

ono, w jaki sposób niepewności wielkości wejściowych w_i, przyjęte jako równe odchyleniom standardowym rozkładów prawdopodobieństwa w_i, składa się w celu otrzymania niepewności wielkości wyjściowej z, jeżeli niepewność tę przyjmuje się za równą odchyleniu standardowemu rozkładu prawdopodobieństwa z.

E.3.3 Równanie (E.3) stosuje się także do propagacji wielokrotności odchyleń standardowych, ponieważ zastąpienie każdego odchylenia standardowego σ_i jego wielokrotnością $k\sigma_i$ prowadzi do zastąpienia odchylenia standardowego σ_z wielkości wyjściowej z jego wielokrotnością $k\sigma_z$. Jednakże nie stosuje się ono do propagacji przedziałów ufności. Jeżeli każde σ_i zastąpi się przez wielkość δ_i definiującą przedział odpowiadający danemu poziomowi ufności p, to wynikająca z równania wielkość δ_z dla z, nie będzie definiowała przedziału odpowiadającego tej samej wartości p, jeżeli wszystkie w_i nie są opisane rozkładami normalnymi. Przy wyprowadzaniu równania (E.3) nie czyni się założeń o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa wielkości w_i. Konkretnie, jeżeli każda niepewność standardowa $u(x_i)$ w równaniu (10) z punktu 5.1.2 jest wyznaczona na podstawie niezależnych powtórzonych obserwacji i pomnożona przez współczynnik t odpowiadający liczbie stopni swobody tych obserwacji i obranej wartości p (np. p = 95 %), to niepewność estymaty y nie będzie określała przedziału ufności odpowiadającego poziomowi p (patrz G.3 i G.4).

UWAGA Wymóg normalności rozkładów przy propagacji przedziałów ufności za pomocą równania (E.3) jest, być może, jednym z historycznych powodów oddzielania składowych niepewności, pochodzących z powtarzanych obserwacji (o których zakłada się, że mają rozkład normalny) od składowych, które są wyznaczane wprost przez górne i dolne granice.

E.3.4 Rozważmy następujący przykład: z jest funkcją jednej wielkości wejściowej w, jest więc $z = f(w)$, gdzie w jest szacowane przez średnią arytmetyczną n wartości w_k wielkości w otrzymanych z n niezależnych powtórzonych obserwacji q_k zmiennej losowej q, a w_k i q_k są związane zależnością

$$w_k = \alpha + \beta q_k \tag{E.4}$$

gdzie α jest stałym "systematycznym" przesunięciem wspólnym dla wszystkich obserwacji, a β jest wspólnym współczynnikiem skali. Mimo, że przesunięcie i współczynnik skali są stałe podczas trwania obserwacji, to zakłada się, że są one scharakteryzowane *a priori* rozkładami prawdopodobieństwa, gdzie α i β są najlepszymi estymatami wartości oczekiwanych tych rozkładów.

Najlepszą estymatą w jest średnia arytmetyczna, otrzymana z

$$\bar{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha + \beta q_k\right) \tag{E.5}$$

Wielkość z jest oszacowana przez $f(\bar{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, ..., q_n)$, a estymatę $u^2(z)$ jej wariancji $\sigma^2(z)$ otrzymuje się z równania (E.3). Jeżeli założymy dla uproszczenia, że $z = w$, tak że najlepszą estymatą z jest $z = f(\bar{w}) = \bar{w}$, to łatwo możemy otrzymać estymatę $u^2(z)$. Obliczając z równania (E.5)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \bar{q} \ \text{ i } \ \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n},$$

oznaczając oszacowania wariancji α i β odpowiednio jako $u^2(\alpha)$ i $u^2(\beta)$ oraz zakładając, że poszczególne obserwacje są nieskorelowane, otrzymujemy z równania (E.3)

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \bar{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{E.6}$$

gdzie $s^2(q_k)$ jest wariancją eksperymentalną z obserwacji q_k, obliczoną z równania (4) w 4.2.2, a $s^2(q_k)/n = s^2(\bar{q})$ jest wariancją eksperymentalną średniej $\bar{q}$ [równanie (5) z 4.2.3].

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

E.3.5 W tradycyjnej terminologii trzeci człon prawej strony równania (E.6) nazywa się "przypadkowym" przyczynkiem do oszacowania wariancji $u^2(z)$, ponieważ maleje on wraz ze wzrostem liczby obserwacji n. Dwa pierwsze człony nazywa się "systematycznym" przyczynkiem, ponieważ nie zależą one od n.

Co ważniejsze, w niektórych tradycyjnych podejściach dotyczących niepewności pomiaru równanie (E.6) jest kwestionowane, ponieważ nie wprowadza ono rozróżnienia na niepewności spowodowane oddziaływaniami systematycznymi i niepewności spowodowane oddziaływaniami przypadkowymi. W szczególności sprzeciwia się składaniu wariancji rozkładów prawdopodobieństwa *a priori* z wariancjami rozkładów wynikających z częstości powtarzania. Uważa się bowiem, że pojęcie prawdopodobieństwa jest stosowalne *tylko* do zdarzeń, które mogą być powtarzalne wiele razy w tych samych warunkach. Prawdopodobieństwo *p* zdarzenia $(0 \leq p \leq 1)$ wskazuje *względną częstość* zachodzenia zdarzenia.

W przeciwieństwie do traktowania prawdopodobieństwa jako częstości względnej, równie słuszny jest pogląd, że prawdopodobieństwo jest miarą stopnia pewności, że zdarzenie zajdzie [13, 14]. Przypuśćmy na przykład, że pewna osoba ma szansę wygrania małej kwoty *D* i jest to osoba zakładająca się w sposób racjonalny. Stopień pewności tej osoby, że nastąpi zdarzenie *A* jest równy p = 0,5, jeżeli jest ona neutralna wobec dwóch możliwości wyboru zakładu:

1) otrzymania *D*, jeżeli zdarzenie *A* nastąpi i nie otrzymania niczego, jeżeli nie nastąpi;

2) otrzymania *D*, jeżeli zdarzenie *A* nie nastąpi i nie otrzymania niczego, jeżeli nie nastąpi.

W Zaleceniu INC-1 (1980), na którym opiera się *Przewodnik*, bez zastrzeżeń przyjmuje się taki pogląd na prawdopodobieństwo, ponieważ uznaje on wyrażenia takie jak równanie (E.6), za odpowiedni sposób obliczania niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru.

E.3.6 Istnieją trzy wyraźne korzyści, wynikające z przyjęcia interpretacji prawdopodobieństwa opartej na stopniu zaufania, odchyleniu standardowym (niepewność standardowa) i prawie propagacji niepewności [równanie (E.3)], jako podstawach wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru, w sposób przedstawiony w *Przewodniku*:

a) prawo propagacji niepewności pozwala na łatwe włączenie niepewności standardowej złożonej jakiegoś wyniku do niepewności standardowej złożonej innego wyniku, w którego skład wchodzi wynik pierwszy,

b) niepewność standardowa złożona, może służyć za podstawę do obliczania przedziałów, odpowiadających w realistyczny sposób, wymaganym dla nich poziomom ufności,

c) nie ma potrzeby klasyfikowania składowych jako "przypadkowe" i "systematyczne" (lub w inny sposób) podczas wyznaczania niepewności, ponieważ wszystkie składowe niepewności są traktowane w ten sam sposób.

Korzystna jest zaleta c), ponieważ taka klasyfikacja jest często źródłem pomyłek. Żadna składowa niepewność nie jest ani "przypadkowa", ani "systematyczna". Natura tej składowej jest uwarunkowana sposobem, w jaki wykorzystujemy odpowiadającą jej wielkość lub bardziej formalnie sposobem, w którym wielkość pojawia się w modelu matematycznym opisującym pomiar. Zatem, gdy dana wielkość zostaje użyta w innym kontekście, składowa "przypadkowa" może stać się składową "systematyczną" i na odwrót.

E.3.7 Z powodów przedstawionych w punkcie c) poprzedniego paragrafu, Zalecenie INC-1 (1980) nie klasyfikuje składowych niepewności na "przypadkowe" i "systematyczne". Faktycznie, jeżeli oblicza się niepewność standardową złożoną wyniku pomiaru, nie potrzeba klasyfikowania składowych niepewności i dlatego nie ma potrzeby tworzenia systemu klasyfikacyjnego. Jednakże, ponieważ dogodne nazwy mogą być pomocne przy przekazywaniu i dyskusji poglądów, Zalecenie INC-1 (1980) podaje system klasyfikacji dwóch *metod* wyznaczania składowych niepewności na typu "A" i typu "B" (patrz 0.7, 2.3.2 i 2.3.3).

Klasyfikacja metod używanych do wyznaczania składowych niepewności pozwala uniknąć zasadniczego problemu związanego z klasyfikacją samych składowych, a mianowicie zależności sklasyfikowania składowej od sposobu wykorzystania odpowiadającej jej wielkości. Jednakże, klasyfikacja, raczej metod niż składowych, nie wyklucza łączenia poszczególnych składowych wyznaczanych dwoma metodami w konkretnych grupach dla określonego celu w danym pomiarze, na przykład przy porównywaniu zaobserwowanej eksperymentalnie i przewidzianej teoretycznie zmienności wartości wielkości wyjściowych w złożonych systemach pomiarowych (patrz 3.4.3).

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

E.4 Odchylenia standardowe jako miary niepewności

E.4.1 Równanie (E.3) wymaga, żeby bez względu na to, w jaki sposób została otrzymana niepewność estymaty wielkości wejściowej, była ona wyznaczona jako niepewność standardowa, to jest jako oszacowane odchylenie standardowe. Jeśli zamiast odchylenia standardowego zostanie wyznaczona jakaś "bezpieczna" jej alternatywa, to nie można jej użyć w równaniu (E.3). W szczególności, jeżeli "maksymalna granica błędu" (największe możliwe do pomyślenia odchylenie od przypuszczalnego najlepszego oszacowania) zostanie użyte w równaniu (E.3), to wynikająca stąd niepewność będzie miała źle określone znaczenie i będzie bezużyteczna dla każdego, kto zechciałby włączyć ją do dalszych obliczeń niepewności innych wielkości (patrz E.3.3).

E.4.2 Jeżeli niepewności standardowej wielkości wejściowej nie można wyznaczyć za pomocą analizy wyników odpowiedniej liczby powtórzonych obserwacji, należy przyjąć rozkład prawdopodobieństwa wynikający z posiadanej wiedzy, która może być mniejsza, niż byłoby to pożądane. Nie sprawia to jednak, że przyjęty rozkład jest nieważny lub nierealistyczny, podobnie jak wszystkie rozkłady prawdopodobieństwa jest tylko wyrazem posiadanej wiedzy.

E.4.3 Wyniki oparte na powtarzanych obserwacjach nie koniecznie muszą mieć przewagę nad wynikami otrzymanymi innymi sposobami. Rozważmy odchylenie standardowe eksperymentalne $s(\bar{q})$ średniej arytmetycznej $\bar{q}$ n niezależnych obserwacji q_k zmiennej losowej q [patrz równanie (5) w 4.2.3]. Wielkość $s(\bar{q})$ jest statystyką (patrz C.2.23) estymującą odchylenie standardowe $\sigma(\bar{q})$ rozkładu prawdopodobieństwa $\bar{q}$, to jest odchylenie standardowe rozkładu wartości $\bar{q}$, który otrzymano by powtarzając pomiar nieskończenie wiele razy. Wariancja $\sigma^2[s(\bar{q})]$ jest dana przybliżoną zależnością

$$\sigma^2[s(\bar{q})] \approx \sigma^2(\bar{q})/(2\nu) \qquad \text{(E.7)}$$

gdzie $\nu = n - 1$ jest liczbą stopni swobody $s(\bar{q})$ (patrz G.3.3). Tak więc względne odchylenie standardowe $s(\bar{q})$, dane stosunkiem $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, które można przyjąć za miarę względnej niepewności $s(\bar{q})$, wynosi w przybliżeniu $[2(n-1)]^{-1/2}$. Ta "niepewność niepewności" $\bar{q}$ powstająca w sposób statystyczny z powodu ograniczonej liczby obserwacji, może być zaskakująco duża. Dla n = 10 obserwacji wynosi ona około 24 %. Niektóre wartości "niepewności niepewności" zamieszczono w tabeli E.1. Z danych w niej zawartych wynika, że odchylenie standardowe statystycznie oszacowanego odchylenia standardowego nie jest zaniedbywalne dla praktycznie stosowanych wartości n. Stąd można wnioskować, że wyznaczanie niepewności standardowej metodą typu A nie koniecznie jest bardziej wiarygodne, niż wyznaczanie niepewności standardowej metodą typu B i że w wielu praktycznie spotykanych sytuacjach pomiarowych, gdzie liczba obserwacji jest ograniczona, składowe otrzymane metodą typu B, mogą być lepiej znane, niż składowe otrzymane metodą typu A.

E.4.4 Zostało dowiedzione, że gdy niepewności związane ze stosowaniem poszczególnych metod pomiarowych są parametrami statystycznymi, charakteryzującymi zmienne losowe, to występują też przypadki "prawdziwie systematycznych oddziaływań", których niepewności muszą być traktowane inaczej. Przykładem jest odchylenie mające nieznaną wartość stałą dla każdego pomiaru wykonanego daną metodą powodowane niedoskonałością istoty samej metody albo którejś z jej podstawowych założeń. Jeżeli jednak przyjmuje się możliwość istnienia takiego odchylenia i znaczącą jego wartość, to można go opisać rozkładem prawdopodobieństwa, obojętnie jak prosto skonstruowanym, opartym na posiadanej wiedzy, z której wynika, że to odchylenie może istnieć i być znacznym. Stąd, jeśli interpretuje się prawdopodobieństwo jako miarę stopnia zaufania, że zdarzenie zajdzie, wkład takiego oddziaływania systematycznego można włączyć do niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru przez wyznaczanie go jako niepewność standardową *a priori* danego rozkładu prawdopodobieństwa i traktowanie go w ten sam sposób, jak każdą inną niepewność standardową wielkości wejściowej.

PRZYKŁAD Pewna procedura pomiarowa zakłada, że wartość jednej z wielkości wejściowych powinna być obliczana z rozwinięcia w szereg potęgowy, którego wyrazy wyższych rzędów nie są dokładnie znane. Nieuwzględnianie dokładnych wartości tych wyrazów jest systematycznym oddziaływaniem na wynik pomiaru prowadzącym do nieznanego stałego odchylenia, które nie może być eksperymentalnie zbadane poprzez powtarzanie procedury pomiarowej. Tak więc, niepewność związana z tym oddziaływaniem nie może być wyznaczona i włączona do niepewności końcowego wyniku pomiaru, jeżeli będzie się ściśle przestrzegać częstościowej interpretacji prawdopodobieństwa. Jednakże interpretując

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

prawdopodobieństwo jako stopień zaufania, można wyznaczyć niepewność charakteryzującą to oddziaływanie z *a priori* danego rozkładu prawdopodobieństwa (przyjętego na podstawie dostępnej wiedzy dotyczącej nieznanych dokładnie wyrazów) i uwzględnić w obliczaniu niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru, jak każdą inną niepewność.

Tab. E.1 – $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, odchylenie standardowe odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej $\bar{q}$ z n niezależnych obserwacji zmiennej q o rozkładzie normalnym w odniesieniu do odchylenia standardowego średniej[(a)(b)]

Liczba obserwacji n	$\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (%)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Podane wartości obliczono z wyrażenia $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, a nie na podstawie zależności $[2(n-1)]^{-1/2}$

(b) W wyrażeniu $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ mianownik $\sigma(\bar{q})$ jest wartością oczekiwaną $E[S/\sqrt{n}]$, a licznik $\sigma[s(\bar{q})]$ jest pierwiastkiem kwadratowym wariancji $V[S/\sqrt{n}]$, gdzie S jest zmienna losową równa odchyleniu standardowemu n niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$, każda mająca rozkład normalny z wartością średnią μ i wariancją σ^2:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\ ,\quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wartość oczekiwana i wariancja S są dane:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}\sigma\ ,\quad V[S] = \sigma^2 - E[S]^2\ ,$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma. Zauważ, że $E[S] < \sigma$ dla skończonej liczby n.

E.5 Porównanie dwóch interpretacji niepewności

E.5.1 *Przewodnik* koncentruje się raczej na wyniku pomiaru i wyznaczonej jego niepewności, niż na nieznanych wielkościach – wartość "prawdziwa" i błąd (patrz aneks D). Przyjmując operacyjny punkt widzenia, że wynik pomiaru jest po prostu wartością przypisaną menzurandowi, a niepewność wyniku jest miarą rozrzutu wartości, które można w sposób uzasadniony przypisać menzurandowi, *Przewodnik* w rezultacie przecina mylące często powiązania pomiędzy niepewnością a nieznanymi wielkościami: wartością "prawdziwą" i błędem.

E.5.2 Powiązania tego można się dopatrywać poprzez interpretację różniczki równania (E.3), czyli prawa propagacji niepewności, z punktu widzenia wartości "prawdziwej" i błędu. W tym przypadku przyjmuje się μ_i jako nieznaną, jedyną wartość "prawdziwą" wielkości wejściowej w_i i o każdym w_i zakłada się, że jest powiązane ze swoją wartością "prawdziwą" μ_i równaniem $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, gdzie ε_i jest błędem wielkości

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

wejściowej w_i. Zakłada się, że wartość oczekiwana rozkładu prawdopodobieństwa każdego ε_i wynosi zero, $E(\varepsilon_i) = 0$, a wariancja $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. Równanie (E.1) przyjmuje postać

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i \tag{E.8}$$

gdzie $\varepsilon_z = z - \mu_z$ jest błędem wielkości z, a μ_z jest wartością "prawdziwą" z. Jeżeli teraz wyznaczy się wartość oczekiwaną kwadratu μ_z, otrzymuje się równanie identyczne w formie z równaniem (E.3), w którym jednak $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ jest wariancją ε_z, a $\rho_{ij} = \upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \big/ (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ jest współczynnikiem korelacji ε_i i ε_j, a $\upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i\, \varepsilon_j)$ jest kowariancją ε_i i ε_j. Wariancje i kowariancje są więc powiązane raczej z *błędami* wielkości wejściowych niż z samymi wielkościami wejściowymi.

UWAGA Zakłada się, że prawdopodobieństwo jest rozumiane jako miara stopnia zaufania w to, że zjawisko zajdzie, włączając to, że błąd systematyczny może być traktowany w ten sam sposób, jak błąd przypadkowy i że ε_i reprezentuje oba rodzaje błędu.

E.5.3 W praktyce, różnice w interpretacji nie prowadzą do różnic w wartościach liczbowych wyniku pomiaru i niepewności związanej z tym wynikiem.

Po pierwsze, w obu przypadkach, do wyznaczania najlepszej estymaty wartości z funkcji f przyjmuje się najlepsze dostępne estymaty wartości wielkości wejściowych w_i i nie ma żadnej różnicy *w obliczeniach*, jeśli te najlepsze estymaty traktuje się jako wartości najbardziej odpowiednie do przyporządkowania wielkościom, o których mowa, czy też jako najlepsze estymaty wartości "prawdziwych" tych wielkości.

Po drugie, ponieważ $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ i ponieważ μ_i reprezentuje pojedyncze stałe wartości nieposiadające żadnej niepewności, wariancje i odchylenia standardowe ε_i i w_i są identyczne. To znaczy, że w obu przypadkach, niepewności standardowe, użyte jako estymaty odchyleń standardowych σ_i do wyznaczenia niepewności standardowej złożonej wyniku pomiaru, są identyczne i dadzą tę samą wartość liczbową tej niepewności. Nie ma żadnej różnicy *w obliczeniach*, jeżeli niepewność standardowa jest traktowana, jako miara rozrzutu rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wejściowej, czy też jako miara rozrzutu rozkładu prawdopodobieństwa błędu tej wielkości.

UWAGA Jeśli nie przyjęto założenia z uwagi w E.5.2, to rozważania tego podrozdziału nie stosują się, chyba że wszystkie estymaty wielkości wejściowych i niepewności tych estymat były otrzymane drogą analizy statystycznej powtórzonych obserwacji, to jest metodą typu A.

E.5.4 Dopóki podejście oparte na wartości "prawdziwej" i błędzie daje te same wyniki liczbowe, jak podejście prezentowane w *Przewodniku* (pod warunkiem przyjęcia założenia z uwagi w E.5.2), koncepcja niepewności przyjęta w *Przewodniku* eliminuje mylenie błędu z niepewnością (patrz aneks D). Rzeczywiście, podejście operacyjne z *Przewodnika*, w którym skupia się uwagę na zaobserwowanej (lub oszacowanej) wartości wielkości i zaobserwowanej (lub oszacowanej) zmienności tej wartości, czyni niepotrzebnymi jakiekolwiek rozważanie o błędzie.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks F

Wskazówki praktyczne dotyczące wyznaczania składowych niepewności

Aneks zawiera dodatkowe wskazówki dla wyznaczania niepewności i jej składowych. Wskazówki mają głównie charakter praktyczny i traktowane są jako uzupełnienie wskazówek podanych w rozdziale 4.

F.1 Składowe niepewności wyznaczane na podstawie powtórzonych obserwacji: metoda typu A wyznaczania niepewności standardowej

F.1.1 Przypadkowość i powtarzane obserwacje

F.1.1.1 Niepewności określane na podstawie powtórzonych obserwacji są często przeciwstawiane niepewnościom wyznaczanym innymi metodami jako "obiektywne", "statystycznie jednoznaczne" itp. Prowadzi to do niesłusznego wniosku, że niepewności mogą być wyznaczane jedynie poprzez zastosowanie procedur statystycznych do obserwacji i że wyniki tych obliczeń nie wymagają oceny.

F.1.1.2 Najpierw należy postawić pytanie: "Do jakiego stopnia powtórzone obserwacje są zupełnie niezależnymi powtórzeniami procedury pomiarowej?". Jeśli wszystkie obserwacje dotyczą pojedynczej próby, i jeśli pobieranie próby jest częścią procedury pomiarowej, to, ponieważ menzurand jest właściwością materiału (w przeciwieństwie do właściwości próby materiału), powtarzane obserwacje nie są niezależne, a do zaobserwowanej wariancji powtórzonych obserwacji na pojedynczej próbie należy dodać oszacowaną składową wariancji wynikającą z możliwych różnic między próbami.

Jeżeli zerowanie przyrządu jest częścią procedury pomiarowej, przyrząd powinien być powtórnie zerowany przed każdym powtórzeniem, nawet jeśli dryf przyrządu w czasie, w którym wykonuje się obserwacje, jest znikomo mały, ponieważ potencjalnie istnieje możliwa do statystycznego określenia niepewność związana z zerowaniem.

Podobnie, jeśli powinno się odczytywać wskazanie barometru, to z zasady powinno się dokonywać odczytów dla każdego powtórzonego pomiaru (zalecane po zaburzeniu jego równowagi i ustaleniu się wskazania), ponieważ może wystąpić zmiana zarówno wskazania, jak i odczytu, nawet jeśli ciśnienie barometryczne jest stałe.

F.1.1.3 Po drugie, należy zadać pytanie, czy wszystkie czynniki wpływające, o których zakłada się, że są przypadkowe, są takimi rzeczywiście. Czy średnie i wariancje ich rozkładów są stałe, czy występuje może dryf wartości nie mierzonej wielkości wpływającej w czasie powtarzanych obserwacji? Jeśli dysponuje się dostateczną liczbą obserwacji, można obliczyć średnie arytmetyczne wyników pierwszej i drugiej połowy okresu oraz ich odchylenia standardowe eksperymentalne, a następnie porównać je, w celu rozstrzygnięcia, czy różnica między nimi jest statystycznie znacząca i stąd, czy istnieje zjawisko ich zmiany w czasie.

F.1.1.4 Jeśli parametry systemu zasilania laboratorium (napięcie i częstotliwość zasilania elektrycznego, ciśnienie i temperatura wody, ciśnienie azotu itp.) są wielkościami wpływającymi, to zwykle występuje wyraźnie nieprzypadkowy element w ich zmianach, którego nie wolno przeoczyć.

F.1.1.5 Jeśli najmniej znacząca cyfra wskazania cyfrowego, wskutek "szumów", zmienia się w czasie obserwacji w sposób ciągły, to trudno jest uniknąć subiektywnego wyboru wartości tej cyfry. Lepiej jest skorzystać z jakieś sposobu zatrzymania wskazania w arbitralnie wybranej chwili i rejestrować to wskazanie.

F.1.2 Korelacje

Większość rozważeń tego podrozdziału odnosi się także do wyznaczania niepewności standardowej metodą typu B.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

F.1.2.1 Kowariancję związaną z estymatorami dwóch wielkości wejściowych X_i i X_j można przyjąć jako równą zeru lub traktować jako nieznaczącą, jeżeli:

a) X_i i X_j są *nieskorelowane* (zmienne losowe, a nie zaś wielkości fizyczne, o których zakłada się, że są niezmienne – patrz 4.1.1, uwaga 1), na przykład, ponieważ są mierzone sekwencyjnie, a nie równocześnie w *różnych* niezależnych eksperymentach, albo ponieważ reprezentują wyniki *różnych* obliczeń, wykonywanych niezależnie, albo jeżeli

b) któraś z wielkości X_i i X_j może być traktowana jako stała, albo jeżeli

c) posiada się niedostateczną ilość informacji, aby wyznaczyć wariancję powiązaną z estymatami X_i i X_j.

UWAGA 1 Z drugiej strony, w pewnych okolicznościach, takich jak w przykładzie z oporem wzorcowym z uwagi 1 do 5.2.2, jest rzeczą oczywistą, że wielkości wejściowe są w pełni skorelowane i że niepewności standardowe ich estymat łączą się liniowo.

UWAGA 2 Różne eksperymenty mogą nie być niezależnymi, jeśli na przykład, używa się w nich tego samego przyrządu (patrz F.1.2.3).

F.1.2.2 To, czy dwie wielkości wejściowe, obserwowane równocześnie w powtarzanych eksperymentach, są skorelowane czy nie, można określić za pomocą równania (17) z 5.2.3. Dla przykładu, jeżeli częstotliwość oscylatora nieskompensowanego lub słabo skompensowanego temperaturowo i temperatura otoczenia są wielkościami wejściowymi, obserwowanymi równocześnie, może wystąpić znaczna korelacja ujawniana przez obliczoną kowariancję częstotliwości oscylatora i temperatury otoczenia.

F.1.2.3 W praktyce, wielkości wejściowe są często skorelowane, ponieważ do szacowania ich wartości używa się tego samego fizycznego wzorca pomiarowego, przyrządu pomiarowego, danych odniesienia i nawet metody pomiarowej, mających, każde z nich, znaczące niepewności. Nie tracąc na ogólności rozważeń, przypuśćmy, że dwie wielkości wejściowe X_1 i X_2, estymowane przez x_1 i x_2, zależą od nieskorelowanych zmiennych $Q_1, Q_2, ..., Q_L$. Jest zatem $X_1 = F(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$ i $X_2 = G(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$, ale niektóre z tych zmiennych mogą aktualnie występować tylko w jednej funkcji, a nie występować w drugiej. Jeśli $u^2(q_l)$ jest oszacowaną wariancją, związaną z estymatą q_l zmiennej Q_l, to oszacowana wariancja związana z x_1, wyznaczona z równania (10) w 5.1.2, wynosi

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \right)^2 u^2(q_l) \qquad \text{(F.1)}$$

Podobnie wyraża się $u^2(x_2)$. Oszacowana kowariancja związana z x_1 i x_2 jest dana przez wyrażenie

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \qquad \text{(F.2)}$$

Ponieważ tylko te wyrazy, dla których $\partial F / \partial q_l \neq 0$ i $\partial G / \partial q_l \neq 0$ dla danego l, wchodzą do sumy, kowariancja wynosi zero, jeśli żadna zmienna nie występuje równocześnie w F i G.

Oszacowany współczynnik korelacji $r(x_1, x_2)$ związany z x_1 i x_2 wyznacza się na podstawie $u(x_1, x_2)$ [równanie (F.2)] i równania (14) w 5.2.2, w którym $u(x_1)$ jest obliczone z równania (F.1) a $u(x_2)$ z podobnego wyrażenia. [Patrz także równanie (H.9) w H.2.3]. Przy oszacowaniu kowariancji związanej z estymatami dwóch wielkości wejściowych może się zdarzyć, że każda z nich ma składową statystyczną [patrz równanie (17) w 5.2.3)] i składową powstającą tak, jak rozważano w niniejszym podrozdziale.

PRZYKŁAD 1 Opornik wzorcowy R_S jest użyty w pomiarze do określenia zarówno prądu I, jak i temperatury t. Prąd jest określany przez pomiar woltomierzem cyfrowym napięcia na oporniku. Temperatura jest określana przez pomiar, mostkiem rezystancyjnym z wzorcem, rezystancji $R_t(t)$ wzorcowanego rezystancyjnego czujnika temperatury, dla którego zależność

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

między temperaturą a rezystancją w zakresie 15 °C ≤ t ≤ 30 °C ma postać $t = aR_t^2(t) - t_0$, gdzie a i t_0 są znanymi stałymi. Prąd wyznacza się z równania $I = V_S / R_S$, a temperaturę z równania $t = a\beta^2(t)R_s - t_0$, w którym $\beta(t)$ jest zmierzonym przez mostek stosunkiem $R_t(t)/R_S$.

Ponieważ tylko wielkość R_S występuje w obydwu wyrażeniach określających prąd I i temperaturę t, to z równania (F.2) wyznaczamy kowariancję I i t

$$u(I,t) = \frac{\partial I}{\partial R_S}\frac{\partial t}{\partial R_S}u^2(R_S) = \left(-\frac{V_S}{R_S^2}\right)\left[2a\beta^2(t)R_S\right]u^2(R_S) = -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2}u^2(R_S)$$

(Dla uproszczenia zapisu, tym samym symbolem oznaczono wielkość wejściową i jej estymatę).

Aby otrzymać wartość liczbową kowariancji, do tego wyrażenia podstawia się wartości liczbowe zmierzonych wielkości I i t oraz wartości R_S i $u(R_S)$ podane w świadectwie wzorcowania opornika wzorcowego. Jednostką $u(I, t)$ jest A·°C, ponieważ wymiarem względnej wariancji $[u(R_S)/R_S]^2$ jest jeden (to znaczy jest ona wielkością bezwymiarową).

Dalej, niech wielkość P będzie związana z wielkościami wejściowymi I i t zależnością $P = C_0 I^2 / (T_0 + t)$, w której C_0 i T_0 są znanymi stałymi danymi ze znikomo małymi niepewnościami $[u^2(C_0) \approx 0, u^2(T_0) \approx 0]$. Z równania (13) z 5.2.2 otrzymuje się wariancję P, określoną przez wariancje I i t oraz ich kowariancję

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_0+t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0+t)^2}$$

Wariancje $u^2(I)$ i $u^2(t)$ zostały otrzymane stosując równania (10) z 5.1.2 do równań $I = V_S/R_S$ i $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$, co prowadzi do wyrażeń

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$
$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2 u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2 u^2(R_S)/R_S^2$$

gdzie dla uproszczenia założono, że niepewności stałych t_0 i a są także do pominięcia. Wartości liczbowe tych niepewności są łatwe do wyznaczenia, ponieważ $u^2(V_S)$ i $u^2(\beta)$ można wyznaczyć z powtórzonych odczytów woltomierza i mostka, odpowiednio. Oczywiście, przy obliczaniu $u^2(V_S)$ i $u^2(\beta)$ należy uwzględnić wszelkie niepewności związane z samymi przyrządami i zastosowanymi procedurami pomiarowymi.

PRZYKŁAD 2 W przykładzie z uwagi 1 w 5.2.2, niech wynik wzorcowania każdego opornika będzie reprezentowany przez $R_i = \alpha_i R_S$, z niepewnością standardową $u(\alpha_i)$ mierzonego stosunku α_i wyznaczoną na podstawie powtórzonych obserwacji. Dalej, niech dla każdego opornika $\alpha_i \approx 1$ i niech $u(\alpha_i)$ będzie takie same dla każdego wzorcowania, tak aby $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Wtedy równania (F.1) i (F.2) prowadzą do zależności $u^2(R_i) = R_S^2 u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ i $u(R_i, R_j) = u^2(R_S)$. To, poprzez równanie (4) z 5.2.2, prowadzi do wniosku, że współczynnik korelacji jakichkolwiek dwóch oporników ($i \neq j$) wynosi

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left[1 + \left(\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right)^2\right]^{-1}$$

Niech $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$; jeżeli $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, to $r_{ij} \approx 0{,}05$; jeśli $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, to $r_{ij} \approx 0{,}990$ i jeżeli $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, to $r_{ij} \approx 1{,}000$. Jeżeli więc $u(\alpha) \to 0$, to $r_{ij} \to 1$ i $u(R_i) \to u(R_S)$.

UWAGA W ogólności, we wzorcowaniach porównawczych, takich jak w powyższym przykładzie, oszacowane wartości wzorcowanych obiektów są skorelowane, ze stopniem korelacji, zależnym od stosunku niepewności porównania do niepewności wzorca odniesienia. Gdy, jak się często zdarza, niepewność porównania jest mała w porównaniu z niepewnością wzorca, współczynniki korelacji są równe +1 i niepewność każdego wzorcowanego obiektu jest taka sama jak wzorca.

F.1.2.4 Można uniknąć konieczności wprowadzania kowariancji $u(x_i, x_j)$, zmieniając pierwotny zbiór wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$, od których zależy menzurand Y [patrz równanie (1) w 4.1], tak aby włączyć do

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

zbioru wielkości wejściowych, jako dodatkowe niezależne wielkości, te wielkości Q_l, które są wspólne dla dwóch lub więcej wielkości wejściowych X_i pierwotnego zbioru. (Może być konieczne wykonanie dodatkowych pomiarów, w celu ustalenia pełnej zależność pomiędzy wielkościami Q_l i poddanymi ich oddziaływaniom wielkościami X_i). Tym niemniej, w pewnych sytuacjach może być wygodniejsze pozostawienie kowariancji, niż zwiększanie liczby wielkości wejściowych. Podobny zabieg można przeprowadzić dla obserwowanych kowariancji równocześnie powtarzanych obserwacji [patrz (17) w 5.2.3], ale identyfikacja odpowiednich dodatkowych wielkości wejściowych jest często *doraźna* i fizycznie nieuzasadniona.

PRZYKŁAD Jeśli, w przykładzie 1 poprzedniego podrozdziału, w równaniu określającym P podstawi się I i t wyrażone przez R_S, to otrzymuje się równanie

$$P = \frac{C_0 V_S^2}{R_S^2[T_0 + a\beta^2(t)R_S^2 - t_0]}$$

korelacja między I i t przestaje być potrzebna dzięki zastąpieniu wielkości I i t przez wielkości V_S, R_S i β. Ponieważ wielkości te są nieskorelowane, wariancję P można otrzymać z równania (10) w 5.1.2.

F.2 Składowe niepewności wyznaczane innymi metodami: metoda typu B wyznaczania niepewności standardowej

F.2.1 Potrzeba stosowania metody typu B wyznaczania niepewności

Jeśli laboratorium pomiarowe ma dość czasu i środków, może prowadzić wyczerpujące badania statystyczne wszystkich możliwych przyczyn niepewności, stosując na przykład wiele różnych konstrukcji i rodzajów przyrządów pomiarowych, stosując różne metody pomiaru, różne ich realizacje i różne aproksymacje ich teoretycznych modeli. Niepewności powiązane ze wszystkimi przyczynami mogą wtedy być wyznaczone drogą statystycznej analizy serii obserwacji i każda z nich może być scharakteryzowana przez statystycznie wyznaczone odchylenie standardowe. Innymi słowami, wszystkie składowe niepewności mogą być wyznaczone metodą typu A. Ponieważ takie badania są ekonomicznie nieuzasadnione, wiele składowych niepewności trzeba wyznaczać innymi, bardziej praktycznymi sposobami.

F.2.2 Rozkłady określone matematycznie

F.2.2.1 Rozdzielczość wskazania cyfrowego

Jednym ze źródłem niepewności przyrządu cyfrowego jest rozdzielczość jego urządzenia wskazującego. Na przykład, nawet gdyby powtarzane wskazania były identyczne, niepewność pomiaru przypisywana powtarzalności nie wynosiłaby zero, ponieważ istnieje pewien określony zakres sygnałów wejściowych przyrządu, które dają to samo wskazanie. Jeśli rozdzielczość urządzenia wskazującego wynosi δx, to wartość wymuszenia, który powoduje dane wskazanie X, może leżeć z jednakowym prawdopodobieństwem, gdziekolwiek w przedziale od $X - \delta x/2$ do $X + \delta x/2$. Wymuszenie jest więc opisane przez prostokątny rozkład prawdopodobieństwa (patrz 4.3.7 i 4.4.5) o szerokości δx i wariancji $u^2 = (\delta x)^2/12$, co odpowiada odchyleniu standardowemu $u = 0{,}29\ \delta x$ dla każdego wskazania.

Tak więc waga z cyfrowym urządzeniem odczytowym, w którym najmniejszą cyfrą znaczącą jest 1 g, ma wariancję powodowaną rozdzielczością urządzenia równą u^2 = (1/12) g^2 i odchylenie standardowe $u = (1/\sqrt{12})$ g = 0,29 g.

F.2.2.2 Histereza

Pewne rodzaje histerezy mogą powodować podobny rodzaj niepewności. Wskazanie przyrządu może różnić się o pewną stałą i znaną wartość, w zależności od tego, czy kolejne odczyty są wykonywane przy rosnącej, czy malejącej wartości wielkości. Uważny eksperymentator zwraca uwagę na kierunek kolejnych odczytów i dokonuje odpowiedniej poprawki. Ale kierunek wpływu histerezy nie zawsze może być zaobserwowany,

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

mogą występować ukryte oscylacje wewnątrz przyrządu wokół położenia równowagi, tak że wskazanie końcowe zależy od tego, z jakiego kierunku ten punkt jest osiągany. Jeśli szerokość zakresu możliwych wartości odczytów zniekształconych histerezą jest równa δx, to wariancja wynosi $u^2 = (\delta x)^2/12$, zaś odchylenie standardowe z powodu histerezy wynosi $u = 0{,}29\ \delta x$.

F.2.2.3 Ograniczona rozdzielczość arytmetyki

Zaokrąglanie lub obcinanie liczb w trakcie obliczeń wykonywanych przez komputer może być także źródłem niepewności. Rozważmy, na przykład, komputer z długością słowa równą 16 bitów. Jeśli w trakcie obliczeń, liczba mająca taką długość słowa jest odejmowana od innej, od której różni się tylko w 16. bicie, pozostaje tylko jeden znaczący bit. Takie przypadki mogą mieć miejsce przy obliczaniu "źle uwarunkowanymi" algorytmami i mogą być trudne do przewidzenia. Niepewność związaną z tą właściwością obliczeń można określić empirycznie wprowadzając małe, stopniowo wzrastające zmiany najistotniejszej dla obliczeń wielkości wejściowej (często jest to wielkość proporcjonalna do wielkości wyjściowej), aż do uzyskania zmiany wartości wielkości wyjściowej. Najmniejsza zmiana wartości wielkości wyjściowej tak uzyskana, może być uważana za miarę niepewności. Jeśli jest ona równa δx, to wariancja wynosi $u^2 = (\delta x)^2/12$, zaś odchylenie standardowe wynosi $u = 0{,}29\ \delta x$.

UWAGA Można sprawdzić wyznaczanie niepewności poprzez porównanie wyniku obliczeń, uzyskanego na komputerze o ograniczonej długości słowa z wynikiem takich samych obliczeń na komputerze, o znacznie większej długości słowa.

F.2.3 Importowane wielkości wejściowe

F.2.3.1 *Importowaną* wartością wielkości wejściowej jest wartość, której nie wyznaczano w trakcie danego pomiaru, ale przyjęto ją jako wyznaczoną na drodze innego, niezależnego postępowania. Często ze znaną wartością importowaną związana jest informacja o niepewności tej wartości. Niepewność może być podana jako odchylenie standardowe, wielokrotność odchylenia standardowego, szerokość połówkowa przedziału o ustalonym poziomie ufności. Mogą być alternatywnie podane dolna i górna granica. Może jednak nie być żadnej informacji o niepewności, w tym przypadku ten, kto przyjmuje taką wartość musi wykorzystać własną wiedzę, o najbardziej prawdopodobnej wartości niepewności wynikającej z natury wielkości, o wiarygodności źródła, o niepewnościach otrzymywanych w praktyce dla takich wielkości, itd.

UWAGA Dyskusja na temat niepewności zewnętrznych wielkości wejściowych jest zawarta w rozdziale poświęconym wyznaczaniu niepewności metodą typu B jedynie ze względu na wygodę. Niepewność takiej wielkości, może być złożona zarówno ze składowych otrzymanych metodą typu A jak i typu B. Ponieważ przy wyznaczaniu niepewności standardowej złożonej nie ma potrzeby rozróżniania pomiędzy składowymi obliczanymi tymi metodami, nie jest więc konieczna znajomość poszczególnych składowych niepewności wielkości zewnętrznej.

F.2.3.2 Niektóre laboratoria wykonujące wzorcowania przyjęły praktykę wyrażania "niepewności", w formie górnej i dolnej granicy, które definiują przedział, mający "minimum" poziomu ufności, na przykład "przynajmniej" 95 %. Niepewność ta może być traktowana jako przykład tak zwanej "bezpiecznej" niepewności (patrz E.1.2), nie można jej przeliczyć na niepewność standardową bez znajomości sposobu, w jaki ją obliczono. Gdy sposób obliczania jest podany, można odtworzyć obliczenia, zgodnie z zasadami *Przewodnika*. W przeciwnym przypadku należy przeprowadzić niezależne wyznaczanie niepewności jakimkolwiek możliwym sposobem.

F.2.3.3 Niektóre niepewności są podane po prostu jako maksymalne granice w obrębie których, jak się mówi, leżą *wszystkie* wartości wielkości. Powszechnie praktykowane jest przyjmowanie, że w obrębie tych granic, wszystkie wartości są jednakowo prawdopodobne (prostokątny rozkład prawdopodobieństwa), nie można jednak przyjmować rozkładu prostokątnego, jeżeli oczekuje się, że wartości wewnątrz przedziału, ale bliskie granic są mniej prawdopodobne niż wartości bliższe środka. Rozkład prostokątny z szerokością połówkową a ma wariancję $a^2/3$. Rozkład normalny, dla którego a jest szerokością połówkową przedziału o poziomie poziom ufności 99,73 %, ma wariancję $a^2/9$. Kompromisowo przyjmuje się niekiedy rozkład trójkątny, dla którego wariancja wynosi $a^2/6$ (patrz 4.3.9 i 4.4.6).

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

F.2.4 Mierzone wielkości wejściowe

F.2.4.1 Pojedyncza obserwacja, przyrządy wzorcowane

Jeżeli estymatę wartości wielkości wejściowej otrzymuje się na podstawie pojedynczej obserwacji wskazania przyrządu, który był wcześniej wzorcowany przy użyciu wzorca o małej niepewności, to niepewność tej estymaty jest głównie związana z powtarzalnością. Wariancja pomiarów powtarzanych tym samym przyrządem mogła być wyznaczona uprzednio, niekoniecznie przy ściśle takiej samej wartości odczytu, ale dostatecznie jej bliskiej. Tak wyznaczoną wariancję można przypisać mierzonej rozpatrywanej wielkości wejściowej. Jeżeli nie posiada się takich informacji, należy dokonać oszacowania na podstawie znajomości aparatury pomiarowej lub przyrządu, znanych wariancji innych przyrządów o podobnej konstrukcji itp.

F.2.4.2 Pojedyncza obserwacja, przyrządy sprawdzane

Nie wszystkie przyrządy pomiarowe są zaopatrzone w świadectwa wzorcowania, nie dla wszystkich też podana jest krzywa wzorcowania. Większość przyrządów skonstruowana jest zgodnie z obowiązującymi normami, a zgodność ich konstrukcji z odpowiednimi normami sprawdzana jest przez producenta albo przez niezależny organ. Zwykle norma ustala wymagania metrologiczne, często w postaci "największych błędów dopuszczalnych", które przyrząd powinien spełniać. Zgodność właściwości przyrządu z wymaganiami określa się przez porównanie z przyrządami kontrolnymi, których maksymalna dopuszczalna niepewność jest zwykle określona w normie. Niepewność ta jest potem składnikiem niepewności sprawdzonego przyrządu.

Jeżeli nic nie wiadomo na temat charakterystycznej krzywej błędów sprawdzonego przyrządu, trzeba założyć, że każdy błąd w granicach dopuszczalnych jest jednakowo prawdopodobny, czyli trzeba przyjąć prostokątny rozkład prawdopodobieństwa. Jednak pewne rodzaje przyrządów pomiarowych, mają krzywe charakterystyczne błędów takie, że błędy te, na przykład, są prawie zawsze dodatnie w jednej części zakresu pomiarowego i ujemne w innych. Czasami takie informacje można wydedukować studiując normę.

F.2.4.3 Wielkości nastawiane

Pomiary wykonuje się często w kontrolowanych warunkach odniesienia, o których zakłada się, że są niezmienne podczas trwania serii pomiarów. Na przykład, pomiary mogą być przeprowadzane na próbkach w mieszanej kąpieli olejowej, której temperatura jest kontrolowana przez termostat. Temperatura kąpieli może być mierzona w czasie każdego pomiaru na próbce, ale jeżeli temperatura kąpieli zmienia się, to chwilowa temperatura próbki może nie być równa temperaturze wskazanej przez termometr zanurzony w kąpieli. Obliczanie fluktuacji temperatury próbki, oparte na teorii przenoszenia ciepła oraz wariancji tych fluktuacji wykracza poza zakres *Przewodnika*, jego podstawą jest znana albo założona zmienność temperatury kąpieli. Zmienność tę można obserwować za pomocą termoogniwa i rejestratora temperatury, ale także można wnioskować o jej przybliżonej charakterystyce ze znajomości natury obiektów kontrolowanych.

F.2.4.4 Asymetryczne rozkłady możliwych wartości

Zdarzają się sytuacje, gdy wszystkie możliwe wartości wielkości leżą po jednej stronie pojedynczej ograniczającej wartości. I tak na przykład, gdy mierzy się stałą pionową wysokość *h* (menzurand) słupa cieczy w manometrze, oś urządzenia mierzącego wysokość może odchylać się od pionu o mały kąt. Długość l zmierzona przez urządzenie będzie zawsze *większa* niż h. Wynika to stąd, że h jest równe rzutowi $l \cos\beta$, stąd $l = h/\cos\beta$, a wszystkie wartości $\cos\beta$ są mniejsze od jedności. Ten tak zwany "błąd cosinusowy" może także wystąpić, jeżeli rzut $h'\cos\beta$ menzurandu h' będzie równy obserwowanej długości l, to jest $l = h' \cos\beta$ i zaobserwowana długość będzie zawsze *mniejsza* niż menzurand.

Jeśli wprowadzi się nową zmienną $\delta = 1 - \cos\beta$, to przy założeniu, że $\beta \approx 0$ lub $\delta << 1$, jak to zwykle jest w praktyce, mamy dla rozpatrywanych dwóch różnych sytuacji

$$h = \bar{l}(1-\delta) \tag{F.3a}$$

$$h' = \bar{l}(1+\delta) \tag{F.3b}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Tutaj $\bar{l}$, najlepsza estymata l, jest średnią arytmetyczną n niezależnych powtórzonych obserwacji l_k długości l z oszacowaną wariancją $u^2(\bar{l})$ [patrz równanie (3) i (5) w 4.2]. Z równań (F.3a) i (F.3b) wynika, że do wyznaczenia estymaty h lub h' trzeba znać estymatę współczynnika poprawkowego δ, podczas gdy do wyznaczenia niepewności standardowej złożonej estymaty h lub h' trzeba znać $u^2(\delta)$, tj. oszacowaną wariancję δ. Stosując równanie (10) z 5.1.2 do równań (F.3a) i (F.3b) otrzymuje się szczegółowe formuły dla $u_c^2(h)$ i $u_c^2(h')$ (ze znakami – i + odpowiednio)

$$u_c^2 = (1 \pm \delta)u^2(\bar{l}) + \bar{l}\,u^2(\delta) \tag{F.4a}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}\,u^2(\delta) \tag{F.4b}$$

Aby otrzymać estymaty wartości oczekiwanej i wariancji δ załóżmy, że oś urządzenia zastosowanego do mierzenia wysokości słupa cieczy w manometrze, jest ustawiona na stałe w płaszczyźnie pionowej i że rozkład wartości kąta inklinacji β wokół jego wartości oczekiwanej równej zeru jest rozkładem normalnym z wariancją σ^2. Chociaż β może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, $\delta = 1 - \cos\beta$ jest dodatnie dla wszystkich wartości β. Jeśli założy się, że ustawienie osi urządzenia jest swobodne, to orientacja osi może się zmieniać w kącie bryłowym, ponieważ jest ona zdolna do niewłaściwego ustawienia się również w azymucie, ale β jest wtedy zawsze kątem dodatnim.

Dla sztywnego ustawienia osi, czyli w przypadku jednowymiarowym, **element prawdopodobieństwa** $p(\beta)\mathrm{d}\beta$ (C.2.5, uwaga) jest proporcjonalny do $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}\mathrm{d}\beta$. Dla swobodnego ustawienia osi, czyli w przypadku dwuwymiarowym, element prawdopodobieństwa jest proporcjonalny do $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$. Do obliczenia z równań (F.3) i (F.4) wartości oczekiwanej i wariancji δ potrzebne są w obu przypadkach wyrażenia określające funkcje gęstości prawdopodobieństwa $p(\delta)$. Otrzymuje się je stosunkowo łatwo z elementów prawdopodobieństwa, ponieważ można założyć, że kąt β jest mały, i stąd $\delta = 1 - \cos\beta$ i $\sin\beta$ można rozwinąć w szereg potęgowy najniższego rzędu względem β. Otrzymuje się $\delta \approx \beta^2/2$, $\sin\beta \approx \beta \approx \sqrt{2\delta}$ i $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\delta \big/ \sqrt{2\delta}$. Stąd funkcje gęstości prawdopodobieństwa

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}}\,\exp\,(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5a}$$

w jednym wymiarze oraz

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2}\,\exp\,(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5b}$$

w dwóch wymiarach, gdzie

$$\int_0^\infty p(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$$

Równania (F.5a) i (F.5b), które pokazują, że najbardziej prawdopodobna wartość poprawki δ w obu przypadkach wynosi zero, dają dla wartości oczekiwanej i wariancji δ w przypadku jednowymiarowym $E(\delta) = \delta^2/2$ i $\mathrm{var}(\delta) = \delta^4/2$, a w przypadku dwuwymiarowym $E(\delta) = \delta^2$ i $\mathrm{var}(\delta) = \delta^4$. Równania (F.3a), (F.3b), (F.4b) przyjmują postać

$$h = \bar{l}\,[1 - (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6a}$$

$$h' = \bar{l}\,[1 + (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6b}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^{\,2}u^4(\beta) \tag{F.6c}$$

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

gdzie d jest wymiarem (d = 1 lub 2), a $u(\beta)$ jest niepewnością standardową kąta β, przyjętą jako najlepsza estymata odchylenia standardowego σ założonego rozkładu normalnego i wyznaczoną na podstawie wszystkich dostępnych informacji, dotyczących pomiaru (metoda typu B). Jest to przykład przypadku, w którym estymata wartości menzurandu zależy od *niepewności* wielkości wejściowej.

Chociaż równania od (F.6a) do (F.6c) odnoszą się do rozkładu normalnego, można jednak przeprowadzić analizę, zakładając inne rozkłady dla β. Na przykład, jeśli się przyjmie się dla β symetryczny rozkład prostokątny w przypadku jednowymiarowym z górną i dolną granicą odpowiednio $+\beta_0$ i $-\beta_0$ i w przypadku dwuwymiarowym, odpowiednio $+\beta_0$ i 0, to $E(\delta) = \beta_0^2/6$ i $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^4/45$ dla przypadku jednowymiarowego oraz $E(\delta) = \beta_0^2/4$ i $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^4/48$ dla przypadku dwuwymiarowego.

UWAGA Jest to sytuacja, kiedy rozwinięcie funkcji $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ w szereg Taylora z wyrazami pierwszego rzędu, dokonane w celu otrzymania $u_c^2(y)$, równanie (10) w 5.1.2, jest zbyt niedokładne z powodu nieliniowości f: $\overline{\cos\beta} \neq \cos\overline{\beta}$ (patrz uwaga 2 do 5.1.2 i H.2.4). Chociaż analizę można w całości przeprowadzić posługując się wielkością β, jednak wprowadzenie zmiennej δ upraszcza problem.

Innym przykładem sytuacji, gdzie wszystkie możliwe wartości wielkości leżą po jednej stronie pojedynczej wartości granicznej, jest określanie drogą miareczkowania stężenia danego składnika w roztworze, gdzie punkt końcowy jest wskazywany wyzwoleniem sygnału. Dodana ilość reagenta jest zawsze większa niż ilość niezbędna do wyzwolenia sygnału, nigdy mniejsza. Nadmiar reagenta ponad punkt graniczny jest zmienną w analizie danych, a procedura w tym przypadku (i w przypadkach podobnych), polega na przyjęciu odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa dla nadmiaru i na wykorzystaniu go do wyznaczenia wartości oczekiwanej nadmiaru i jego wariancji.

PRZYKŁAD Jeśli przyjmie się dla nadmiaru z rozkład prostokątny o dolnej granicy zero i górnej C_0, to wartość oczekiwana nadmiaru z wynosi $C_0/2$, zaś wariancja z nią związana wynosi $C_0/12$. Jeśli przyjmie się dla nadmiaru z rozkład normalny w przedziale $0 \leq z < \infty$, to jest $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1}\exp[-z^2/(2\sigma^2)]$, to wartość oczekiwana wynosi $\sigma\sqrt{2/\pi}$, a wariancja $\sigma^2(1-2/\pi)$.

F.2.4.5 Niepewność w przypadku niestosowania poprawek wynikających z krzywej wzorcowania

Uwaga do 6.3.1 wspomina przypadek, w którym, zamiast uwzględnienia w podanym wyniku pomiaru poprawki b korygującej oddziaływania systematyczne, rozszerza się niepewność przypisaną wynikowi pomiaru. Przykładem takiego postępowania jest zastąpienie niepewności rozszerzonej U przez $U + b$, gdzie U jest niepewnością rozszerzoną, otrzymaną przy założeniu, że $b = 0$. Praktyka ta jest czasami stosowana w sytuacjach, kiedy menzurand Y jest zdefiniowany w pewnym zakresie wartości parametru t, jak w przypadku krzywej wzorcowania czujnika temperaturowego, a U i b także zależą od t i podawana jest tylko pojedyncza wartość "niepewności" dla wszystkich estymat $y(t)$ menzurandu w całym zakresie możliwych wartości t. W takich sytuacjach wynik pomiaru jest często podawany w postaci przedziału $Y(t) = y(t) \pm [U_{\max} + b_{\max}]$, gdzie indeks "max" pokazuje, że podane są maksymalna wartość U i maksymalna wartość poprawki b w całym przedziale wartości t.

Chociaż *Przewodnik* zaleca stosowanie do wyników pomiarów poprawek ze względu na znane znaczące oddziaływania systematyczne, to nie zawsze jest to możliwe w takiej sytuacji ze względu na niedopuszczalny koszt, który zostałby poniesiony przy obliczaniu i stosowaniu oddzielnych poprawek i niepewności dla każdej wartości $y(t)$.

Podamy stosunkowo prosty sposób rozwiązania takiego problemu, spójny z zasadami *Przewodnika*. Polega on na wyliczeniu pojedynczej średniej poprawki $\overline{b}$ ze wzoru

$$\overline{b} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(F.7a)}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

i przyjęciu $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ jako najlepszej estymaty $Y(t)$, przy czym t_1 i t_2 są granicami zakresu wartości przyjmowanych przez parametr t, a $y(t)$ jest najlepszą nieskorygowaną estymatą $Y(t)$. Wariancja związana ze średnią poprawką $\bar{b}$ w zakresie wartości t jest dana zależnością

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \bar{b}]^2 \, \mathrm{d}t \tag{F.7b}$$

nieuwzględniającą niepewności wyznaczenia poprawki $b(t)$. Średnia wariancja poprawki $b(t)$ jest dana wzorem

$$\overline{u^2\left[b(t)\right]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2\left[b(t)\right] \mathrm{d}t \tag{F.7c}$$

w którym $u^2[b(t)]$ jest wariancją poprawki $b(t)$. Podobnie, średnią wariancję $y(t)$ wynikającą ze wszystkich źródeł niepewności innych niż poprawka $b(t)$, można wyrazić wzorem

$$\overline{u^2\left[y(t)\right]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2\left[y(t)\right] \mathrm{d}t \tag{F.7d}$$

gdzie $u^2[y(t)]$ jest wariancją $y(t)$ spowodowaną przez wszystkie różne od $b(t)$ źródła niepewności. Pojedyncza wartość niepewności standardowej, którą można zastosować dla *wszystkich* estymat $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ menzurandu $Y(t)$ jest zaś dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z

$$u_{\mathrm{c}}^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\bar{b}) \tag{F.7e}$$

Niepewność rozszerzoną U wyznacza się mnożąc $u_{\mathrm{c}}(y')$ przez odpowiednio wybrany współczynnik k, $U = k\,u_{\mathrm{c}}(y')$, co prowadzi do $Y(t) = y'(t) + U = y(t) + \bar{b} \pm U$. Jednakże stosowanie jednej poprawki średniej dla wszystkich wartości t zamiast odpowiedniej poprawki dla każdej wartości t musi mieć swoje uzasadnienie, a towarzyszyć mu musi jasne stwierdzenie, co reprezentuje U.

F.2.5 Niepewność metody pomiarowej

F.2.5.1 Najtrudniejszą, być może, do wyznaczenia jest składowa niepewności związana z metodą pomiarową, szczególnie jeśli stosowanie tej metody wskazuje, że daje ona wyniki z mniejszą zmiennością, niż wyniki otrzymane inną znaną metodą. Jest jednak prawdopodobnym, że istnieją inne metody, niektóre z nich jeszcze nieznane albo w jakiś sposób niepraktyczne, które mogłyby dawać systematycznie różne wyniki pozornie tak samo wartościowe. Implikuje to rozkład prawdopodobieństwa *a priori*, a nie rozkład, z którego łatwo można wziąć próbę i potraktować ją statystycznie. Stąd, nawet chociażby niepewność metody mogła być dominującą, to często jedyną informacją dostępną przy wyznaczaniu jej niepewności standardowej jest aktualna wiedza o świecie fizycznym. (Patrz także E.4.4).

UWAGA Określając ten sam menzurand różnymi metodami w tym samym laboratorium lub w różnych laboratoriach, albo tą samą metodą w różnych laboratoriach, można często uzyskać cenne informacje o niepewności związanej z daną metodą. W ogólności, wymiana pomiędzy laboratoriami wzorców pomiarowych i materiałów odniesienia stosowanych w niezależnych pomiarach jest użytecznym sposobem ocenienia wiarygodności wyznaczania niepewności i identyfikacji wcześniej nierozpoznanych oddziaływań systematycznych.

F.2.6 Niepewność próbki

F.2.6.1 Wiele pomiarów wymaga porównywania nieznanego obiektu ze znanym wzorem o podobnych charakterystykach, wykonywanego w celu wzorcowania obiektu nieznanego. Przykładem są płytki wzorcowe, pewne rodzaje termometrów, zestawy odważników, oporników i materiałów o wysokim stopniu czystości. W większości takich przypadków metody pomiarowe nie są specjalnie uzależnione lub podatne niekorzystnym oddziaływaniom od wyboru próbki badanej, od sposobu traktowania próbki albo wpływów różnych wielkości charakteryzujących środowisko, ponieważ obiekt badany i wzorzec reagują zwykle w ten sam (a często przewidywalny) sposób na te zmienne.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

F.2.6.2 W pewnych sytuacjach pomiarowych, próbkowanie i traktowanie próbki odgrywają o wiele większą rolę. Tak właśnie jest często podczas analizy chemicznej substancji pochodzenia naturalnego. W przeciwieństwie do substancji wyprodukowanych przez człowieka, które mogą być jednorodne w stopniu przewyższającym jednorodność wymaganą w danym pomiarze, substancje naturalne są często bardzo niejednorodne. Ta niejednorodność prowadzi do dwóch dodatkowych składowych niepewności. Ocena pierwszej z nich wymaga ustalenia, na ile wiernie wybrana próbka reprezentuje substancję poddaną analizie. Ocena drugiej z nich wymaga ustalenia, do jakiego stopnia drugorzędne (nieanalizowane) składniki wpływają na pomiar i czy są one odpowiednio uwzględniane przez metodę pomiarową.

F.2.6.3 W pewnych przypadkach właściwe planowanie eksperymentu umożliwia statystyczne wyznaczenie niepewności na podstawie próbki (patrz H.5 i H.5.3.2). Zwykle jednak, a szczególnie wówczas, gdy wpływy środowiska na próbkę są znaczące, przy wyznaczaniu niepewności niezbędne są umiejętności i wiedza analityka pochodzące z doświadczenia i wszystkich dostępnych źródeł informacji.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks G

Stopnie swobody i poziomy ufności

G.1 Wprowadzenie

G.1.1 Aneks G jest poświęcony ogólnym problemom wyznaczania, na podstawie estymaty *y* menzurandu Y i niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$ tej estymaty, niepewności rozszerzonej $U_p = k_p u_c(y)$, która wytycza przedział $y - U_p \le Y \le y + U_p$ o określonym, wystarczająco dużym, przypisanym mu prawdopodobieństwie rozszerzenia lub poziomie ufności p. Sprowadza się to do określania współczynnika rozszerzenia k_p wyznaczającego wokół wyniku pomiaru *y* przedział, od którego można oczekiwać, że obejmie dużą, określoną część p rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać menzurandowi Y (patrz rozdział 6).

G.1.2 W większości praktycznych sytuacji pomiarowych, obliczenie przedziałów mających określone poziomy ufności, a faktycznie oszacowanie większości pojedynczych składowych niepewności, jest w najlepszym wypadku tylko przybliżone. Nawet odchylenie standardowe eksperymentalne średniej z tak wielu, jak z 30 obserwacji wielkości opisanej przez rozkład normalny, ma samo niepewność około 13 % (patrz tabela E.1 w aneksie E).

W większości przypadków, nie ma sensu rozróżniać, na przykład, przedziału o poziomie ufności 95 % (jedna szansa ma 20, że wartość menzurandu Y leży poza tym przedziałem) od przedziałów o poziomach ufności 94 % i 96 % (1 szansa na 17 i na 25, odpowiednio). Otrzymanie wiarygodnych przedziałów o poziomie ufności 99 % (1 szansa na 100) i wyższych jest szczególnie trudne, nawet jeśli założy się, że nie przeoczono żadnych oddziaływań systematycznych, ponieważ zwykle posiada się mało informacji o skrajnych częściach "ogonów" rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wejściowych.

G.1.3 Aby określić wartość współczynnika rozszerzenia k_p wyznaczającego przedział odpowiadający określonemu poziomowi ufności p, należy znać rozkład prawdopodobieństwa charakteryzującego wynik pomiaru oraz jego niepewność standardową złożoną. Na przykład, dla wielkości *z* opisanej przez rozkład normalny z wartością oczekiwaną μ_z i odchyleniem standardowym σ, można obliczyć wartość k_p wyznaczającą przedział $\mu_z \pm k_p \sigma$ obejmujący część p rozkładu i stąd mający określne prawdopodobieństwo, czyli poziom ufności p. Niektóre wartości współczynnika rozszerzenia dla rozkładu normalnego podano w tabeli G.1.

Tab. G.1 – Wartość współczynnika rozszerzenia k_p określającego dla rozkładu normalnego przedział o poziomie ufności p

Poziom ufności p (%)	**Współczynnik rozszerzenia k_p**
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA Jeśli z ma prostokątny rozkład prawdopodobieństwa z wartością oczekiwaną μ_Z i odchyleniem standardowym $\sigma = a/\sqrt{3}$, gdzie a jest szerokością połówkową rozkładu, poziom ufności p wynosi 57,74 % dla k_p = 1; 95 % dla k_p = 1,65; 99 % dla k_p = 1,71 i 100 % dla $k_p \geq \sqrt{3} \approx$ 1,73. Rozkład prostokątny jest "węższy" niż rozkład normalny w tym sensie, że ma skończoną rozciągłość i nie ma "ogonów".

G.1.4 Jeśli rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$, od których zależy menzurand Y są znane [a także ich wartości oczekiwane i wariancje oraz momenty wyższe (patrz C.2.13 i C.2.22), jeśli rozkłady nie są rozkładami normalnymi], i jeśli Y jest funkcją liniową wielkości wejściowych (sumą ważoną) $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$, to rozkład prawdopodobieństwa Y można wyznaczyć jako splot poszczególnych rozkładów wielkości wejściowych [10]. Wartości k_p, które tworzą przedziały odpowiadające określonym poziomom ufności p, można następnie obliczyć na podstawie wynikowego rozkładu splotowego.

G.1.5 Jeżeli funkcja określająca zależność między Y i wielkościami wejściowymi $X_1, X_2, ..., X_N$ jest nieliniowa i szereg Taylora z wyrazami pierwszego rzędu jest przybliżeniem niewystarczającym (patrz 5.1.2 i 5.1.5), wtedy rozkładu prawdopodobieństwa Y nie można wyznaczać przez splatanie rozkładów wielkości wejściowych. W takich przypadkach należy posługiwać się innymi analitycznymi lub numerycznymi metodami wyznaczania rozkładu funkcji zmiennych losowych.

G.1.6 W praktyce, ponieważ parametry charakteryzujące rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wejściowych są zwykle szacowane, gdyż nierealistyczne jest oczekiwanie, że poziom ufności, który ma być związany z danym przedziałem, może być znany z dużą dokładnością i ze względu na złożoność splatanych rozkładów prawdopodobieństwa, takie sploty rzadko, jeśli w ogóle, są stosowane, gdy trzeba obliczyć przedziały o określonych poziomach ufności. Zamiast tego stosowane są przybliżenia, które wykorzystują centralne twierdzenie graniczne.

G.2 Centralne twierdzenie graniczne

G.2.1 Jeżeli $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ i wszystkie X_i mają rozkłady normalne, to rozkład Y także jest normalny. Jednakże, nawet jeżeli rozkłady X_i nie są normalne, rozkład Y często, na mocy centralnego twierdzenia granicznego, można aproksymować rozkładem normalnym. Twierdzenie to orzeka, że rozkład Y będzie w *przybliżeniu normalny* z wartością oczekiwaną $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ i wariancją $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$, gdzie $E(X_i)$ jest wartością oczekiwaną X_i, a $\sigma^2(X_i)$ jest wariancją X_i, jeśli X_i są niezależne i $\sigma^2(Y)$ jest dużo większe niż jakakolwiek pojedyncza składowa $c_i\,\sigma^2(X_i)$ wielkości X_i, mającej inny rozkład niż rozkład normalny.

G.2.2 Centralne twierdzenie graniczne jest ważne, ponieważ pokazuje jak duże znaczenie mają wariancje rozkładów prawdopodobieństwa wielkości wejściowych, w porównaniu z momentami wyższych rzędów tych rozkładów, przy określaniu postaci wyniku splotu rozkładu zmiennej Y. Dalej, pokazuje ono, że splatany rozkład zbliża się do rozkładu normalnego, gdy wzrasta liczba wielkości wejściowych, wnoszących swoje udziały do $\sigma^2(Y)$. Zbliżanie to jest tym szybsze, im bliższe sobie są wartości $c_i^2\sigma^2(X_i)$ (w praktyce jest to równoznaczne z wnoszeniem przez estymaty wielkości wejściowych porównywalnych udziałów do niepewności estymaty menzurandu Y). Im bliższe normalnym są rozkłady wielkości X_i, tym mniej ich trzeba splatać, aby otrzymać rozkład normalny dla Y.

PRZYKŁAD Rozkład prostokątny (patrz 4.3.7 i 4.4.5) jest krańcowym przykładem rozkładu odbiegającego od normalnego, ale nawet splot tak niewielkiej liczby rozkładów o równej szerokości jak *trzy* daje już rozkład w przybliżeniu normalny. Jeśli szerokość połówkowa każdego z trzech rozkładów prostokątnych jest równa a, a więc wariancja każdego z nich wynosi $a^2/3$, to wariancja splecionego rozkładu wynosi $\sigma^2 = a^2$. Przedziały 95 % i 99 % splecionego rozkładu, są określone przez 1,937σ i 2,379σ odpowiednio, podczas gdy odpowiednie przedziały dla rozkładu normalnego z tym samym odchyleniem standardowym σ są określone przez 1,960σ i 2,576σ (patrz tablica G.1) [10].

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

UWAGA 1 Dla każdego przedziału o poziomie ufności p większym niż około 91,7 %, wartość k_p dla rozkładu normalnego jest większa niż odpowiednia wartość dla rozkładu będącego splotem rozkładów prostokątnych w dowolnej ilości i o dowolnych rozmiarach.

UWAGA 2 Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że rozkład prawdopodobieństwa średniej arytmetycznej $\bar{q}$ n obserwacji q_k zmiennej losowej q o wartości oczekiwanej μ_q i skończonym odchyleniem standardowym σ zbliża się do rozkładu normalnego o μ_q i odchyleniu standardowym $\sigma/\sqrt{n}$, gdy $n \to \infty$ niezależnie od tego jaki jest rozkład prawdopodobieństwa q.

G.2.3 Praktyczną konsekwencją centralnego twierdzenia granicznego jest to, że wówczas gdy jego założenia z grubsza są spełnione, w szczególności, gdy niepewność standardowa złożona $u_c(y)$ nie jest zdominowana przez składową niepewności standardowej, wyznaczoną metodą typu A z serii niewielu obserwacji lub przez składową niepewności standardowej, wyznaczoną metodą typu B z przyjętego rozkładu prostokątnego, to uzasadnionym pierwszym przybliżeniem przy obliczaniu niepewności rozszerzonej $U_p = k_p\, u_c(y)$, wyznaczającej przedział o poziomie ufności p, jest przyjęcie dla k_p wartości wynikającej z rozkładu normalnego. Najczęściej stosowane wartości k_p podano w tabeli G.1.

G.3 Rozkład *t*-Studenta i stopnie swobody

G.3.1 Aby otrzymać lepsze przybliżenie, niż przy użyciu wartości k_p z rozkładu normalnego jak w G.2.3, trzeba zauważyć, że obliczenie przedziału mającego określony poziom ufności wymaga nie rozkładu zmiennej $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, ale rozkładu zmiennej $[y - Y]/u_c(Y)$, a to dlatego, że w praktyce znana jest tylko estymata Y wyznaczana ze wzoru $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, gdzie x_i jest estymatą X_i, oraz wariancja złożona $u_c^2(y)$ związana z y, wyznaczona ze wzoru $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, gdzie $u(x_i)$ jest niepewnością standardową (oszacowane odchylenie standardowe) estymaty x_i.

UWAGA Ściśle mówiąc, w wyrażeniu $(y - Y)/u_c(y)$ Y powinno być rozumiane jako $E(Y)$. Dla prostoty, takie rozróżnienie zastosowano tylko w paru miejscach w *Przewodniku*. Generalnie jednak, ten sam symbol stosowano do oznaczania wielkości fizycznej, zmiennej losowej reprezentującej tę wielkość i wartości oczekiwanej tej zmiennej (patrz 4.1.1, uwagi).

G.3.2 Jeśli z jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną μ_z i odchyleniem standardowym σ, a $\bar{z}$ jest średnią arytmetyczną n niezależnych obserwacji z_k zmiennej z, z odchyleniem standardowym eksperymentalnym $s(\bar{z})$ średniej $\bar{z}$ [patrz równanie (3) i (5) w 4.2], wtedy rozkład zmiennej $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ jest **rozkładem zmiennej** t **lub rozkładem Studenta** (C.3.8) z liczbą stopni swobody $\nu = n - 1$.

Konsekwentnie, jeśli menzurand Y jest pojedynczą wielkością X o rozkładzie normalnym, to $Y = X$ i jeśli X jest oszacowane średnią arytmetyczną $\bar{X}$ n niezależnych powtórzonych obserwacji X_k zmiennej X, z odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej $s(\bar{X})$, wtedy najlepszą estymatą Y jest $y = \bar{X}$, a odchylenie standardowe eksperymentalne tej estymaty wynosi $u_c(y) = s(\bar{X})$. Wtedy $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ $= (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ ma rozkład *t*-Studenta i zachodzi

$$\Pr\left[-t_p(\nu) \le t \le t_p(\nu)\right] = p \qquad \text{(G.1a)}$$

lub

$$\Pr\left[-t_p(\nu) \le (y - Y)/u(y) \le t_p(\nu)\right] = p \qquad \text{(G.1b)}$$

co można zapisać jako

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$\Pr\left[y - t_p(v)u_c(y) \le Y \le y + t_p(v)u_c(y))\right] = p \qquad \text{(G.1c)}$$

W wyrażeniach tych Pr[ ] oznacza "prawdopodobieństwo tego, że", a współczynnik $t_p(v)$ jest wartością t dla danej wartości parametru v – stopni swobody (patrz G.3.3) – takim, że część p rozkładu t jest objęta przez przedział od $-t_p(v)$ do $+t_p(v)$. Stąd niepewność rozszerzona

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(v)u_c(y) \qquad \text{(G.1d)}$$

określa przedział od $y - U_p$ do $y + U_p$, umownie zapisywany jako $Y = y \pm U_p$, od którego można oczekiwać, że obejmuje p-tą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przyporządkować Y, a p jest określnym prawdopodobieństwem, czyli poziomem ufności tego przedziału.

G.3.3 Liczba stopni swobody v jest równa $n - 1$ dla pojedynczej wielkości oszacowanej średnią arytmetyczną n niezależnych obserwacji, tak jak w G.3.2. Jeżeli korzystano z n niezależnych obserwacji przy wyznaczaniu metodą najmniejszych kwadratów nachylenia charakterystyki liniowej i współrzędnej punktu jej przecięcia z osią rzędnych, to liczba stopni swobody niepewności standardowych wyznaczonych parametrów wynosi $v = n - 2$. Przy dopasowywaniu metodą najmniejszych kwadratów m parametrów charakterystyki do n punktów pomiarowych liczba stopni swobody niepewności standardowej wynosi dla każdego parametru $v = n - m$. (Patrz [15], gdzie omawia się stopnie swobody.)

G.3.4 Wybrane wartości $t_p(v)$ dla różnych wartości v i różnych wartości p podano w tablicy G.2 na końcu aneksu G. Jeżeli $n \to \infty$, rozkład t-Studenta zbliża się do rozkładu normalnego i $t_p(v) \approx (1 + 2/v)^{1/2} k_p$, gdzie k_p w tym wyrażeniu jest współczynnikiem rozszerzenia wyznaczającym dla rozkładu normalnego przedział o poziomie ufności p. Stąd też wartość $t_p(\infty)$ w tabeli G.2 dla danego p równa się wartości k_p w tabeli G.1 dla tego samego p.

UWAGA Często dla rozkładu t-Studenta tablice podają kwantyle $t_{1-\alpha}$, gdzie $1 - \alpha$ oznacza prawdopodobieństwo skumulowane, a równanie

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, v)\,\mathrm{d}t$$

określa kwantyl, przy czym f jest tu funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej t. W ten sposób t_p i $t_{1-\alpha}$ są związane przez zależność $p = 1 - 2\alpha$. Dla przykładu, wartość kwantyla $t_{0,975}$, dla $1 - \alpha = 0{,}975$ i $\alpha = 0{,}025$ jest taka sama jak $t_p(v)$ dla $p = 0{,}95$.

G.4 Wypadkowa liczba stopni swobody

G.4.1 Rozkład t-Studenta nie opisuje rozkładu zmiennej $(y - Y)/u_c(y)$ jeżeli $u_c^2(y)$ jest sumą dwóch lub więcej oszacowanych składowych wariancji $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (patrz 5.1.3), nawet jeśli każde x_i jest estymatą wielkości wejściowej X_i, mającej rozkład normalny. Jednakże rozkład tej zmiennej można aproksymować rozkładem t-Studenta z wypadkową liczbą stopni swobody v_{eff} otrzymaną ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a [16,17,18]

$$\frac{u_c^4}{v_{\mathrm{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{v_i} \qquad \text{(G.2a)}$$

lub

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_{\mathrm{c}}^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

przy czym

$$\nu_{\mathrm{eff}} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \tag{G.2c}$$

gdzie $u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (patrz 5.1.3). Niepewność rozszerzona $U_p = k_p\, u_{\mathrm{c}}(y) = t_p(\nu_{\mathrm{eff}})\, u_{\mathrm{c}}(y)$ wyznacza przedział $Y = y \pm U_p$ mający poziom ufności równy w przybliżeniu p.

UWAGA 1 Jeśli wartość ν_{eff} otrzymana z równania (G.2b) nie jest całkowita, co często zdarza się w praktyce, wartość t_p wyznacza się z tabeli G.2 dla całkowitej liczby stopni swobody wyznaczonej przez interpolację lub przez obcięcie ν_{eff} do najbliższej mniejszej od niej liczby całkowitej.

UWAGA 2 Jeśli estymata wartości wielkości wejściowej x_i jest wyznaczona na podstawie dwóch lub więcej innych estymat, wtedy wartość ν_i odpowiadająca $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ w mianowniku równania (G.2b) jest wypadkową liczbą stopni swobody obliczoną z wyrażenia analogicznego do równania (G.2b).

UWAGA 3 W zależności od potrzeb potencjalnych użytkowników wyniku pomiaru, może być wskazane obliczenie i podanie, oprócz ν_{eff}, także wartości ν_{effA} i ν_{effB}, wyznaczonych z równania (G.2b) osobno dla niepewności standardowych wyznaczonych metodą typu A i metodą typu B. Jeśli oddzielne wkłady do $u_{\mathrm{c}}^2(y)$ niepewności standardowych liczonych metodą typu A i metodą typu B oznaczy się odpowiednio przez $u_{\mathrm{cA}}^2(y)$ i $u_{\mathrm{cB}}^2(y)$, to będzie

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = u_{\mathrm{cA}}^2(y) + u_{\mathrm{cB}}^2(y)$$

$$\frac{u_{\mathrm{c}}^4(y)}{\nu_{\mathrm{eff}}} = \frac{u_{\mathrm{cA}}^4(y)}{\nu_{\mathrm{effA}}} + \frac{u_{\mathrm{cB}}^4(y)}{\nu_{\mathrm{effB}}}$$

PRZYKŁAD Przyjmijmy, że $Y = f(X_1, X_2, X_3) = b\, X_1 X_2 X_3$ i że estymaty x_1, x_2, x_3 wartości wielkości wejściowych X_1, X_2, X_3 o rozkładach normalnych są średnimi arytmetycznymi odpowiednio z $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ i $n_3 = 15$ niezależnych powtórzonych obserwacji ze względnymi niepewnościami standardowymi $u(x_1)/x_1 = 0{,}25$ %, $u(x_2)/x_2 = 0{,}57$ % i $u(x_3)/x_3 = 0{,}82$ %. W tym przypadku $c_i = \partial f / \partial X_i = Y / X_i$ (wyznaczone dla x_1, x_2, x_3 – patrz 5.1.3, uwaga 1), $[u_{\mathrm{c}}(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3} [u(x_i)/x_i]^2$ = (1,03 %)^2 (patrz uwaga 2 w 5.1.6) i równanie (G.2b) przyjmuje postać

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{[u_{\mathrm{c}}(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3} \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

Zatem

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0$$

Wartość t_p dla $p = 95$ % i $\nu = 19$, według tabeli G.2, jest równa $t_{95}(19) = 2{,}09$; stąd względna niepewność rozszerzona przy tym poziomie ufności wynosi $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03\ \%) = 2{,}2$ %. Można więc przyjąć, że $Y = y \pm U_{95} = y\,(1 \pm 0{,}022)$ (y należy wyznaczyć ze wzoru $y = b\, x_1 x_2 x_3$), albo też, że $0{,}978\, y \le Y \le 1{,}022 y$ i że poziom ufności związany z tym przedziałem jest w przybliżeniu równy 95 %.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

G.4.2 W praktyce $u_c(y)$ zależy od niepewności standardowych $u(x_i)$ estymat wartości wielkości wejściowych, zarówno tych, które mają rozkłady normalne, jak i tych, których rozkłady różnią się od normalnych, a $u(x_i)$ są wyznaczane z rozkładów prawdopodobieństwa, zarówno opartych na częstościach względnych, jak i danych *a priori* (wyznaczanych zarówno metodą typu A jak i metodą typu B). Powyższe stosuje się do estymaty y i estymat wartości wielkości wejściowych x_i, od których zależy y. Tym niemniej rozkład prawdopodobieństwa funkcji $t = (y - Y)/u_c(y)$ może być aproksymowany rozkładem t-Studenta, jeśli funkcja jest rozwinięta w szereg Taylora wokół swojej wartości oczekiwanej. W istocie, to jest to, co osiągnięto w przybliżeniu najniższego rzędu za pomocą wzoru Welcha-Satterthwaite'a, czyli równania (G.2a) lub równania (G.2b).

Nasuwa się pytanie jaką liczbę stopni swobody należy przypisać niepewności standardowej, wyznaczonej metodą typu B, gdy ν_{eff} jest obliczane z równania (G.2b). Ponieważ odpowiednia definicja liczby stopni swobody pokazuje, że ν występujące w rozkładzie t-Studenta jest miarą niepewności wariancji $s^2(\bar{z})$, to do określania liczby stopni swobody ν_i można zastosować równanie (E.7) w E.4.3

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\,\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \qquad \text{(G.3)}$$

Wielkość w nawiasach kwadratowych jest względną niepewnością $u(x_i)$. Przy wyznaczaniu niepewności standardowej typu B jest to wielkość subiektywna, której wartość otrzymuje się przez dokonanie naukowej oceny w oparciu o całokształt dostępnych informacji.

PRZYKŁAD Przypuśćmy, że na podstawie znajomości sposobu wyznaczania estymaty wartości wielkości wejściowej x_i i jej niepewności standardowej $u(x_i)$ dochodzi się do wniosku, że wartość $u(x_i)$ jest pewna na około 25 %. Można to zrozumieć tak, że względna niepewność wynosi $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$ i stąd, według równania (G.3), $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$ Jeśli zamiast tego, oceniłoby się, że wartość $u(x_i)$ jest pewna na około 50 %, to byłoby wtedy $\nu_i = 2$ (patrz także tabela E.1 w dodatku E).

G.4.3 Rozważając w 4.3 i 4.4 wyznaczanie niepewności standardowej typu B z danego *a priori* rozkładu prawdopodobieństwa, domyślnie przyjęto, że wartość $u(x_i)$ wynikająca z obliczeń jest dokładna. Dla przykładu, gdy $u(x_i)$ wyznaczono z prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa o założonej szerokości połówkowej $a = (a_+ - a_-)/2$, jak w 4.3.7 i 4.4.5, to $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ przyjmowano jako wartość stałą bez żadnej niepewności, ponieważ a_+ i a_-, a stąd i a, traktowano jako wartości dokładnie znane nie obarczone niepewnościami (patrz jednak 4.3.9, uwaga 2). Z tego, na podstawie równania (G.3), wynika, że $\nu_i \to \infty$ czyli $1/\nu_i \to 0$, co nie sprawia żadnych trudności w obliczeniach na podstawie równania (G.2b). Dalej, założenie, że warunek $\nu_i \to \infty$ nie koniecznie jest nierealne. Powszechnie praktykuje się wybieranie a_+ i a_- tak, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość rozważanej wielkość leży poza przedziałem od a_+ do a_- było ekstremalnie małe.

G.5 Dalsze rozważania

G.5.1 W literaturze poświęconej niepewności pomiaru spotyka się wyrażenie, używane często do wyznaczania niepewności, która ma określać przedział o poziomie ufności 95 %, w postaci

$$U'_{95} = [t_{95}^2(\nu'_{\mathrm{eff}})s^2 + 3u^2]^{1/2} \qquad \text{(G.4)}$$

Wartość $t_{95}(\nu'_{\mathrm{eff}})$ jest wzięta z rozkładu t-Studenta o liczbie stopni swobody ν'_{eff} i p = 95 %, gdzie ν'_{eff} jest wypadkową liczbą stopni swobody obliczoną ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a [równanie (G.2b)] *tylko* dla składowych s_i niepewności standardowej wyznaczonych statystycznie z powtórzonych obserwacji *w trakcie* pomiaru, a $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$, $c_i \equiv \partial f/\partial x_i$ oraz $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2(a_j^2/3)$ liczy się dla *wszystkich* innych

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

składowych niepewności, gdzie $+a_j$ i $-a_j$ i są zakładanymi dokładnie znanymi granicami X_j, górną i dolną, względem jej najlepszego oszacowania x_j (to jest $x_j - a_j \le X_j \le x_j + a_j$).

UWAGA Składowa oparta na powtórzonych obserwacjach wykonanych poza bieżącym pomiarem jest traktowana w ten sam sposób, jak każda inna składowa zawarta w u^2. Stąd w celu sensownego porównania równania (G.4) z równaniem (G.5) z następnego podrozdziału, przyjęto, że takie składowe o ile występują, są pomijalne.

G.5.2 Jeżeli niepewność rozszerzona określająca przedział o poziomie ufności 95 % jest wyznaczana metodami zaleconymi w G.3 i G.4, to zamiast równania (G.4) otrzymuje się równanie

$$U_{95} = t_{95}\left(v_{\mathrm{eff}}\right)\left(s^2 + u^2\right)^{1/2} \tag{G.5}$$

gdzie v_{eff} jest obliczone z równania (G.2b), a w obliczeniach uwzględnia się *wszystkie* składowe niepewności.

W większości przypadków, wartość U_{95} z równania (G.5) będzie większa, niż wartość U'_{95} z równania (G.4), jeżeli przyjmie się, że wszystkie wariancje wyznaczone metodą typu B są obliczone z rozkładów *a priori* prostokątnych o szerokościach połówkowych równych granicom a_j, przyjętym do obliczenia u^2 z równania (G.4). Staje się to zrozumiałe, jeżeli zauważy się, że chociaż $t_{95}(v'_{\mathrm{eff}})$ jest w większości przypadków nieco większe niż $t_{95}(v_{\mathrm{eff}})$, to obydwa współczynniki są bliskie 2. W równaniu (G.5) u^2 jest mnożone przez $t_p^2(v_{\mathrm{eff}}) \approx 4$, podczas gdy w równaniu (G.4) jest ono mnożone przez 3. Chociaż te dwa równania dają takie same wartości U'_{95} i U_{95} przy $u^2 << s^2$, to U'_{95} jest około 13 % mniejsze od U_{95}, jeśli $u^2 >> s^2$. Stąd, ogólnie rzecz biorąc, z równania (G.4) otrzymuje się niepewność, której odpowiada przedział o mniejszym poziomie ufności niż przedział, który daje niepewność rozszerzoną, obliczoną z równania (G.5).

UWAGA 1 W granicy $u^2/s^2 \to \infty$ i $v_{\mathrm{eff}} \to \infty$, $U'_{95} \to 1{,}732u$ i $U_{95} = 1{,}960u$. W tym wypadku U'_{95} daje przedział o poziomie ufności równym tylko 91,7 %, podczas gdy U_{95} tworzy przedział o poziomie ufności 95 %. Przypadek ten w przybliżeniu występuje w praktyce, gdy dominują składowe wyznaczone z estymat górnej i dolnej granicy, o porównywalnych wartościach $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2 / 3$.

UWAGA 2 Dla rozkładu normalnego, współczynnik rozszerzenia $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ daje przedział o poziomie ufności p = 91,673 %. Ta wartość p jest odporna w tym sensie, że w porównaniu z innymi wartościami, maksymalnie niezależna od małych odchyleń wielkości wejściowych od normalności.

G.5.3 W pewnych przypadkach wielkość wejściowa X_i może mieć rozkład asymetryczny – odchylenia jednego znaku od jej wartości oczekiwanej są bardziej prawdopodobne, niż odchylenia przeciwnego znaku (patrz 4.3.8). Chociaż nie pociąga to za sobą różnicy przy wyznaczaniu niepewności standardowej $u(x_i)$ estymaty x_i wielkości wejściowej X_i, a tym samym i przy obliczaniu $u_{\mathrm{c}}(y)$, może jednak wpływać na obliczenie U.

Zwykle wygodnie jest podawać symetryczny przedział $Y = y \pm U$, chyba że odchylenia przeciwnych znaków różnią się znacznie między sobą. Jeśli asymetria X_i powoduje tylko małą asymetrię w rozkładzie prawdopodobieństwa charakteryzowanym przez wynik pomiaru y i jego niepewność standardową złożoną $u_{\mathrm{c}}(y)$, to strata prawdopodobieństwa z jednej strony przez podanie symetrycznego przedziału jest skompensowana przez uzysk prawdopodobieństwa z drugiej. Innym rozwiązaniem jest podanie przedziału symetrycznego pod względem prawdopodobieństw (a stąd asymetryczny pod względem U). Prawdopodobieństwo, że Y leży poniżej dolnej granicy $y - U_-$ jest równe prawdopodobieństwu, że Y leży powyżej górnej granicy $y + U_+$. Ale żeby podać takie granice, potrzeba więcej informacji, niż przy zwykłym szacowaniu y i $u_{\mathrm{c}}(y)$ [i stąd więcej informacji niż przy zwykłym szacowaniu x_i i $u(x_i)$ każdej wielkości wejściowej].

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

G.5.4 Wyznaczanie niepewności rozszerzonej U_p podanej za pomocą $u_c(y)$, ν_{eff} i współczynnika $t_p(\nu_{eff})$ z rozkładu t-Studenta jest tylko przybliżeniem i ma swoje ograniczenia. Zmienna losowa $(y-Y)/u_c(y)$ ma rozkład t-Studenta tylko wtedy, gdy rozkład Y jest normalny, estymata y i jej niepewność standardowa złożona $u_c(y)$ są niezależne i jeżeli rozkład $u_c^2(y)$ jest rozkładem χ^2. Wprowadzenie ν_{eff}, równanie (G.2b), rozwiązuje tylko ostatni problemem, nadając $u_c^2(y)$ w przybliżeniu rozkład χ^2. Rozwiązanie pozostałych problemów wynikających z nienormalności rozkładu Y wymaga rozważenia momentów wyższych rzędów.

G.6 Podsumowanie i wnioski

G.6.1 Współczynnik rozszerzenia k_p, określający przedział o poziomie ufności p bliskim poziomowi ustalonemu, można znaleźć tylko wtedy, kiedy znane są rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wejściowych i wyznaczony przez ich złożenie rozkład prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej. Nie wystarcza znajomość samych estymat wielkości wejściowych x_i i ich niepewności standardowych $u(x_i)$.

G.6.2 Ponieważ złożoność obliczeń składania rozkładów prawdopodobieństwa rzadko kiedy jest uzasadniona zasobem i wiarygodnością dostępnych informacji, godzimy się na aproksymację rozkładu wielkości wyjściowej. Na mocy centralnego twierdzenia granicznego zwykle wystarczy założyć, że rozkład prawdopodobieństwa $(y-Y)/u_c(y)$ jest rozkładem normalnym i przyjąć $k_p = t_p(\nu_{eff})$, z czynnikiem t wynikającym z wypadkowej liczby stopni swobody ν_{eff} dla $u_c(y)$, danej wzorem Welcha-Satterthwaite'a, równanie (G.2b).

G.6.3 Aby wyznaczyć ν_{eff} z równania (G.2b) należy znać liczby stopni swobody ν_i każdej składowej niepewności standardowej. Liczba stopni swobody ν_i składowej wyznaczanej metodą typu A jest określona przez liczbę niezależnych powtórzonych obserwacji, na podstawie których jest obliczona odpowiednia estymata wielkości wejściowej i liczbę niezależnych wielkości wyznaczanych z tych obserwacji (patrz G.3.3). Stopnie swobody ν_i składowej wyznaczonej metodą typu B określa się na podstawie ocenionej wiarogodności wartości tej składowej [patrz G.4.2 równanie (G.3)].

G.6.4 Poniżej podano skrócony przepis obliczania niepewności rozszerzonej $U_p = k_p\, u_c(y)$, wyznaczającej przedział $Y = y \pm U_p$ o odpowiednim poziomie ufności p:

1) Wartości y i $u_c(y)$ wyznacza się według zasad podanych w rozdziałach 4 i 5.

2) Wartość ν_{eff} oblicza się ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a, równanie (G.2b) (powtórzone tu dla ułatwienia)

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

   Jeśli $u(x_i)$ jest wyznaczane metodą typu A, ν_i oblicza się według zasad podanych w G.3.3. Jeśli $u(x_i)$ jest wyznaczane metodą typu B i może być traktowane jako wartość dokładna, co zdarza się faktycznie dość często, to $\nu_i \to \infty$. W przeciwnym wypadku, przybliżoną wartość ν_i oblicza się z równania (G.3).

3) Wartość kwantyla $t_p(\nu_{eff})$ rozkładu t-Studenta, dla wymaganego poziomu ufności p, określa się z tabeli G.2. Jeśli ν_{eff} nie jest liczbą całkowitą, to należy przyjąć liczbę całkowitą najbliższą wartości obliczonej i od niej mniejszą.

4) Jako współczynnik rozszerzenia przyjmuje się $k_p = t_p(\nu_{eff})$ i oblicza $U_p = k_p\, u_c(y)$.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

G.6.5 W pewnych sytuacjach, które nie powinny zdarzać się zbyt często, warunki wymagane przez centralne twierdzenie graniczne mogą nie być spełnione i postępowanie przedstawione w G.6.4 będzie wówczas prowadziło do wyników niewiarygodnych, niemożliwych do przyjęcia. I tak, jeśli $u_c(y)$ jest zdominowane przez składową niepewności wyznaczoną na podstawie rozkładu prostokątnego, którego granice przyjęto jako znane, to może się zdarzyć [jeśli $t_p(\nu_{\mathrm{eff}}) > \sqrt{3}$], że $y = U_p$ i $y = U_p$, górna i dolna granica przedziału określonego przez U_p, będą leżały poza granicami rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej Y. Takie przypadki należy traktować indywidualnie, często można korzystać z aproksymacji analitycznych (wymagających, na przykład, splatania rozkładu normalnego z rozkładem prostokątnym [10]).

G.6.6 Wiele pomiarów w wielu różnych dziedzinach wykonuje się w warunkach, w których:

- estymatę y menzurandu Y wyznacza się z estymat x_i znacznej liczby wielkości wejściowych X_i opisywanych dobrze uwarunkowanymi rozkładami prawdopodobieństwa, takimi jak rozkład normalny lub rozkład prostokątny,
- niepewności standardowe $u(x_i)$ tych estymat, wyznaczone bądź to metodą typu A bądź typu B, dają porównywalne wkłady do niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$ wyniku pomiaru y,
- liniowa aproksymacja wynikająca z prawa propagacji niepewności jest wystarczająco dokładna (patrz 5.1.2 i E.3.1),
- niepewność $u_c(y)$ jest wystarczająco mała, ponieważ jej liczba wypadkowych stopni swobody ν_{eff} jest wystarczająco duża, powiedzmy większa niż 10.

W tych warunkach, na mocy centralnego twierdzenia granicznego, można przyjąć jako normalny rozkład prawdopodobieństwa charakteryzowany przez wynik pomiaru i jego niepewność standardową złożoną, a $u_c(y)$, z powodu znacznej wartości ν_{eff}, można przyjąć jako wystarczająco wiarygodną estymatę odchylenia standardowego rozkładu normalnego. Stąd też, biorąc pod uwagą dyskusję przeprowadzoną w tym aneksie i uwzględniając przybliżony charakter procesu wyznaczania niepewności i znikome praktyczne znaczenie rozróżniania przedziałów o poziomach ufności różniących się o jeden lub dwa procenty, można postąpić następująco:

- przyjąć $k = 2$ i założyć, że $U = 2\, u_c(y)$ określa przedział o poziomie ufności w przybliżeniu 95 %

lub też w sytuacjach wymagających większej pewności

- przyjąć $k = 3$ i założyć, że $U = 3\, u_c(y)$ określa przedział o poziomie ufności w przybliżeniu 99 %.

Chociaż ten sposób postępowania powinien być odpowiedni dla wielu pomiarów, jego stosowalność do konkretnego pomiaru będzie zależała od tego, jak bliskie jest $k = 2$ do $t_{95}(\nu_{\mathrm{eff}})$ lub $k = 3$ do $t_{99}(\nu_{\mathrm{eff}})$, to jest jak bliski do 95 % i 99 % jest poziom ufności przedziału określonego przez $U = 2\, u_c(y)$ lub $U = 3\, u_c(y)$, odpowiednio. I chociaż dla $\nu_{\mathrm{eff}} = 11$, przy $k = 2$ i $k = 3$, tak określone przedziały są mniejsze od $t_{95}(11)$ i $t_{99}(11)$ odpowiednio tylko o około 10 % i 4 % (patrz tabela G.2), to może to być nie do zaakceptowania w niektórych przypadkach. Dalej, dla wszystkich wartości ν_{eff} cokolwiek większych niż 13, $k = 3$ daje przedział o poziomie ufności większym niż 99 % (patrz tabela G.2, z której wynika, że dla $\nu_{\mathrm{eff}} \to \infty$ poziomy ufności przedziałów wyznaczanych przez $k = 2$ i $k = 3$ wynoszą odpowiednio 95,45 % i 99,73 %). Stąd w praktyce, wartość ν_{eff} i wymagania co do niepewności rozszerzonej będą decydowały o tym, czy takie postępowanie może być stosowane.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Tab. G.2 – Wartość $t_p(\nu)$ rozkładu t-Studenta o ν stopniach swobody, określająca przedział od $-t_p(\nu)$ do $+t_p(\nu)$ obejmujący p-tą część rozkładu

Stopnie swobody	Wartość ułamka p (%)					
ν	68,27[a)]	90	95	95,45[a)]	99	99,73[a)]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,72	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) Dla wielkości z opisanej rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej μ_z i odchyleniu standardowym σ przedział $\mu_z \pm k\sigma$ obejmuje p = 68,27 %, 95,45 % i 99,73 % rozkładu dla k = 1, 2 i 3, odpowiednio.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks H

Przykłady

Aneks H zawiera sześć szczegółowo opracowanych przykładów ilustrujących przedstawione w *Przewodniku* podstawowe zasady wyznaczania i wyrażania niepewności pomiaru. Wraz z przykładami podanymi w głównym tekście *Przewodnika* i przykładami w innych dodatkach powinny one umożliwić Czytelnikom wprowadzanie tych zasad do praktyki ich własnej pracy.

Ponieważ podane przykłady mają charakter ilustracyjny, są one z konieczności uproszczone. Ponadto, ponieważ przykłady i dane liczbowe w nich używane dobierano głównie w celu przedstawienia zasad omawianych w *Przewodniku*, to nie ma potrzeby interpretowania ani przykładów, ani danych liczbowych jako koniecznie odnoszących się do faktycznie wykonanych pomiarów. W celu uniknięcia błędów zaokrąglania, w obliczeniach pośrednich przyjmuje się zwykle dane liczbowe wyrażane większą ilością cyfr niż dane podawane w tekście. Stąd podawany wynik obliczenia obejmującego kilka wielkości może się nieznacznie różnić od wyniku wynikającego z wartości liczbowych podanych dla tych wielkości w tekście.

Na kartach *Przewodnika* podkreślono, że podział metod wyznaczania składowych niepewności na metody typu A i metody typu B przyjęto tylko dla wygody i nie ma potrzeby określania metody obliczania niepewności standardowej złożonej czy niepewności rozszerzonej wyniku pomiaru, ponieważ wszystkie składowe niepewności, niezależnie od metody ich wyznaczania, są traktowane w ten sam sposób (patrz 3.3.4, 5.1.2 i E.3.7). Stąd w przykładach nie jest określany typ metody wyznaczania poszczególnych składowych niepewności. Jednakże z kontekstu będzie jasno wynikać, czy dana składowa niepewności jest wyznaczania metodą typu A, czy metodą typu B.

H.1 Wzorcowanie płytki wzorcowej

Przykład ten pokazuje, że nawet pozornie prosty pomiar może obejmować specyficzne aspekty wyznaczania niepewności.

H.1.1 Problem pomiarowy

Długość płytki wzorcowej o nominalnej długości 50 mm jest określana przez porównanie tej płytki z wzorcem kontrolnym o tej samej długości nominalnej. Bezpośrednim wynikiem porównania dwóch płytek jest różnica d ich długości

$$d = l\left(1+\alpha\theta\right) - l_{\mathrm{S}}\left(1+\alpha_{\mathrm{S}}\theta_{\mathrm{S}}\right) \tag{H.1}$$

gdzie:

l jest menzurandem, to jest długością płytki wzorcowanej w temperaturze 20 °C,

l_{S} jest długością płytki kontrolnej w temperaturze 20 °C podaną w jej świadectwie wzorcowania,

α i α_{S} są współczynnikami rozszerzalności cieplnej odpowiednio płytki wzorcowanej i kontrolnej,

θ i θ_{S} są *odchyleniami* temperatury od temperatury odniesienia 20 °C odpowiednio płytki wzorcowanej i kontrolnej.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.1.2 Model matematyczny

Zgodnie z równaniem (H.1) długość *l* płytki wzorcowanej można wyznaczyć z zależności

$$l = \frac{l_S\left(1+\alpha_S\theta_S\right)+d}{1+\alpha\theta} = l_S + d + l_S\left(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta\right) + \ldots \qquad \text{(H.2)}$$

Jeśli różnicę temperatur płytki wzorcowanej i kontrolnej przedstawi się jako $\delta\theta = \theta - \theta_S$, zaś różnicę ich współczynników rozszerzalności cieplnej jako $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, to równanie (H.2) przyjmie postać

$$l = f\left(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta\right) = l_S + d - l_S\left(\delta\alpha\theta - \alpha_S\delta\theta\right) \qquad \text{(H.3)}$$

Przyjmujemy jako zerowe różnice $\delta\theta$ i $\delta\alpha$, ale traktujemy ich niepewności jako różne od zera. Założymy ponadto, że $\delta\alpha$, α_S, $\delta\theta$ i θ są nieskorelowane. (Gdyby menzurand był wyrażony przez zmienne θ, θ_S, α i α_S, należałoby uwzględnić korelacje między θ i θ_S oraz między α i α_S).

Z równania (H.3) wynika, że estymatę wartości menzurandu *l* można wyrazić jako $l_S + \bar{d}$, gdzie l_S jest długością wzorca w temperaturze 20 °C, podaną w jego świadectwie wzorcowania, a d jest estymowane przez $\bar{d}$, średnią arytmetyczną $n = 5$ niezależnych powtórzonych obserwacji. Niepewność standardową złożoną $u_c(l)$ wielkości l otrzymuje się stosując równanie (10) z 5.1.2 do równania (H.3), co pokażemy poniżej.

UWAGA W tym i w pozostałych przykładach dla prostoty oznaczeń użyto tego samego symbolu dla wielkości i jej estymaty.

H.1.3 Wariancje składowe

Istotne elementy związane z tym przykładem, omówione w tym i następnych podrozdziałach, zebrano w tabeli H.1.

Ponieważ przyjęliśmy, że $\delta\alpha = 0$ i $\delta\theta = 0$, to stosując równanie (10) z 5.1.2 do równania (H.3) otrzymujemy

$$u_c^2(l) = c_S^2 u^2(l_S) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 u^2(\alpha_S) + c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \qquad \text{(H.4)}$$

przy czym

$$c_S = \frac{\partial f}{\partial l_S} = 1 - (\delta\alpha\cdot\theta + \alpha_S\cdot\delta\theta) = 1$$

$$c_d = \frac{\partial f}{\partial d} = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_S} = -l_S\delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} = -l_S\delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \delta\alpha} = -l_S\theta$$

$$c_{\delta\theta} = \frac{\partial f}{\partial \delta\theta} = -l_S\alpha_S$$

a stąd

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) + l_S^2\theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_S^2\alpha_S^2 u^2(\delta\theta) \qquad \text{(H.5)}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.1.3.1 Niepewność wzorcowania płytki kontrolnej wzorca $u(l_S)$

Świadectwo wzorcowania podaje rozszerzoną niepewność pomiaru długości płytki kontrolnej $U = 0{,}075\ \mu\text{m}$ i stwierdza, że wyznaczono ją dla współczynnika rozszerzenia $k = 3$. Niepewność standardowa wynosi więc

$$u(l_S) = (0{,}075\ \mu\text{m})/3 = 25\ \text{nm}$$

H.1.3.2 Niepewność mierzonej różnicy długości $u(d)$

Połączone odchylenie standardowe eksperymentalne charakteryzujące porównanie l i l_S wyznaczone wcześniej na podstawie zmienności 25 niezależnych powtórzonych obserwacji różnicy długości dwóch płytek wzorcowych, wynosi 13 nm. W przykładzie porównanie obejmowało pięć powtórzonych obserwacji. Niepewność standardowa związana ze średnią arytmetyczną tych obserwacji wynosi zatem (patrz 4.2.4)

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13\ \text{nm})/\sqrt{5} = 5{,}8\ \text{nm}$$

Zgodnie ze świadectwem wzorcowania komparatora użytego do porównania l z l_S, jego niepewność "spowodowana oddziaływaniami przypadkowymi" wynosi $\pm 0{,}01\ \mu\text{m}$ na poziomie ufności 95 % i opiera się na sześciu powtórzonych pomiarach. Niepewność standardowa, stosując współczynnik rozszerzenia wynikający z rozkładu t-Studenta, będący kwantylem $t_{95}(5) = 2{,}57$ dla $\nu = 6 - 1 = 5$ stopni swobody (patrz aneks G, tabela G.2), wynosi

$$u(d_1) = (0{,}01\ \mu\text{m})/2{,}57 = 3{,}9\ \text{nm}$$

Niepewność komparatora "spowodowana oddziaływaniami systematycznymi" jest podana w świadectwie jako równa $0{,}02\ \mu\text{m}$ na "poziomie trzy sigma". Niepewność standardowa wywołaną tą przyczyną można zatem przyjąć jako równą

$$u(d_2) = (0{,}02\ \mu\text{m})/3 = 6{,}7\ \text{nm}$$

Całkowity udział wyznaczamy jako sumę oszacowanych wariancji

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ \text{nm}^2$$

czyli

$$u(d) = 9{,}7\ \text{nm}$$

H.1.3.3 Niepewność współczynnika rozszerzalności cieplnej $u(\alpha_S)$

Współczynnik rozszerzalności cieplnej płytki kontrolnej jest podany jako równy $\alpha_S = 11{,}5 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$ z niepewnością reprezentowaną przez rozkład prostokątny o granicach $\pm 2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$. Niepewność standardowa wynosi więc [patrz równanie (7) w 4.3.7]

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1})/\sqrt{3} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$$

Ponieważ, jak to wykazano w H.1.3, $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$, niepewność ta nie wnosi nic do niepewności l w przybliżeniu pierwszego rzędu. Jednakże ma ona swój wkład do niepewności w przybliżeniu drugiego rzędu, co jest rozważane w H.1.7.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Tab. H.1 – Zestawienie składowych niepewności standardowej

Składowa niepewności standardowej $u(x_i)$	Źródło niepewności	Wartość niepewności standardowej $u(x_i)$	$c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert\, u(x_i)$ (nm)	Stopnie swobody
$u(l_S)$	Wzorcowanie płytki kontrolnej	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Różnica między płytkami	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	powtarzane obserwacje	5,8 nm			24
$u(d_1)$	oddziaływania przypadkowe komparatora	3,9 nm			5
$u(d_2)$	oddziaływania systematyczne komparatora	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Współczynnik rozszerzalności cieplnej płytki kontrolnej	$1{,}2 \times 10^{-6}$ °C	0	0	
$u(\theta)$	Temperatura stolika pomiarowego	0,41 °C	0	0	
$u(\bar{\theta})$	średnia temperatura stolika	0,2 °C			
$u(\Delta)$	okresowe zmiany temperatury otoczenia	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Różnica współczynników rozszerzalności cieplnej płytek	$0{,}58 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Różnica temperatur płytek	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
				$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1\,002\ \text{nm}^2$ $u_c(l) = 32$ nm $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$	

H.1.3.4 Niepewność odchylenia temperatury płytek wzorcowych $u(\theta)$

Temperatura stolika pomiarowego jest podana jako równa $(19{,}9 \pm 0{,}5)$ °C. Temperatura w czasie trwania poszczególnych obserwacji nie była notowana. Podane maksymalne odchylenie $\Delta = 0{,}5$ °C można traktować jako amplitudę w przybliżeniu cyklicznych zmian temperatury w układzie termostatyzowanym, nie zaś niepewność średniej temperatury. Wartość średniego odchylenia temperatury

$$\bar{\theta} = 19{,}9\ °\text{C} - 20\ °\text{C} = -0{,}1\ °\text{C}$$

jest podana jako mająca sama niepewność standardową powodowaną niepewnością średniej temperatury stolika pomiarowego

$$u(\bar{\theta}) = 0{,}2\ °\text{C}$$

podczas gdy cykliczne zmiany temperatury w czasie tworzą rozkład o kształcie litery U (arcsin) dając niepewność standardową

$$u(\Delta) = (0{,}5\ °\text{C})/\sqrt{2} = 0{,}35\ °\text{C}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Odchylenie temperatury θ można przyjąć jako równe $\bar{\theta}$ i stąd niepewność standardową wielkości θ obliczamy z wyrażenia

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ °\mathrm{C}^2$$

z którego wynika

$$u(\theta) = 0{,}41\ °\mathrm{C}$$

Ponieważ, jak wykazano w H.1.3, $c_\theta = \partial f / \partial\theta = -l_\mathrm{S}\delta\alpha = 0$, niepewność ta nie wnosi nic do niepewności wielkości l w przybliżeniu pierwszego rzędu dokładności. Jednakże ma ona swój wkład do niepewności w przybliżeniu drugiego rzędu, co jest rozważane w H.1.7.

H.1.3.5 Niepewność różnicy współczynników rozszerzalności cieplnej $u(\delta\alpha)$

Oszacowane granice zmienności $\delta\alpha$ współczynników rozszerzalności cieplnej wynoszą $\pm 1 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$, z jednakowym prawdopodobieństwem przyjęcia dowolnej wartości w obrębie tych granic. Niepewność standardowa wynosi więc

$$u(\delta\alpha) = (1\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0{,}58\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$$

H.1.3.6 Niepewność różnicy temperatur płytek wzorcowych $u(\delta\theta)$

Oczekuje się, że płytka kontrolna i wzorcowana będą w obszarze tej samej temperatury, jednak różnica ich temperatur może przyjmować z równym prawdopodobieństwem dowolną wartość z oszacowanego przedziału od −0,05 °C do +0,05 °C. Niepewność standardowa wynosi więc

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ °\mathrm{C}) / \sqrt{3} = 0{,}029\ °\mathrm{C}$$

H.1.4 Niepewność standardowa złożona

Niepewność standardową złożoną $u_\mathrm{c}(l)$ obliczamy z równania (H.5). Poszczególne składowe niepewności zebrane i podstawione do tego równania dają

$$u_\mathrm{c}^2(l) = (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (0{,}05\ \mathrm{m})^2\,(-0{,}1\ °\mathrm{C})^2\,(0{,}58\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2 + (0{,}05\ \mathrm{m})^2\,(11{,}5\times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2\,(0{,}029\ °\mathrm{C})^2 \quad \text{(H.6a)}$$

$$= (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (2{,}9\ \mathrm{nm})^2 + (16{,}6\ \mathrm{nm})^2 = 1002\ \mathrm{nm}^2 \quad \text{(H.6b)}$$

czyli

$$u_\mathrm{c}(l) = 32\ \mathrm{nm} \quad \text{(H.6c)}$$

Dominująca składową niepewności standardowej złożonej jest oczywiście niepewność pochodząca od płytki kontrolnej $u(l_\mathrm{S})$ = 25 nm.

H.1.5 Końcowy wynik pomiaru

Świadectwo wzorcowania płytki kontrolnej podaje l_S = 50,000 623 mm jako jej długość w temperaturze 20 °C. Średnia arytmetyczna $\bar{d}$ z pięciu powtórzonych obserwacji różnicy długości między płytką wzorcowaną a płytką kontrolną wynosi 215 nm. Stąd, ponieważ $l = l_\mathrm{S} + \bar{d}$ (patrz H.1.2), długość l płytki wzorcowanej w temperaturze 20 °C wynosi 50,000 838 mm. Zgodnie z 7.2.2 końcowy wynik pomiaru może być zapisany następująco:

> l = 50,000 838 mm z niepewnością standardową złożoną u_c = 32 nm. Odpowiadająca jej względna niepewność standardowa złożona wynosi $u_\mathrm{c}/l = 6{,}4\times 10^{-7}$.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.1.6 Niepewność rozszerzona

Przypuśćmy, że wymaga się wyznaczenia niepewności rozszerzonej $U_{99} = k_{99}\, u_c(l)$, która daje przedział o poziomie ufności w przybliżeniu 99 %. Zastosowano przy tym procedurę obliczeniową opisaną w G.6.4. Liczbę stopni swobody podano w tablicy H.1. Otrzymano je następująco:

1) *Niepewność wzorcowania płytki kontrolnej* $u(l_S)$ [H.1.3.1]. Świadectwo wzorcowania podaje, że wypadkowa liczba stopni swobody niepewności standardowej złożonej, z której otrzymano cytowaną niepewność rozszerzoną wynosi $v_{\mathrm{eff}}(l_S) = 18$.

2) *Niepewność mierzonej różnicy długości u*(*d*) [H.1.3.2]. Chociaż $\bar{d}$ było otrzymane z pięciu powtórzonych obserwacji, a $u(\bar{d})$ zostało otrzymane z połączonego odchylenia standardowego eksperymentalnego opartego na 25 obserwacjach, to liczba stopni swobody $u(\bar{d})$ wynosi $v(\bar{d})$ = 25 – l = 24 (patrz H.3.6, uwaga). Liczba stopni swobody $u(d_1)$, niepewności związanej z oddziaływaniami systematycznymi komparatora, wynosi $v(d_1)$ = 6 – 1 = 5, ponieważ d_1 zostało otrzymane z 6 powtórzonych pomiarów. Można przyjąć, że niepewność ±0,02 μm związana z oddziaływaniami systematycznymi komparatora jest niewiarygodna w 25 procentach i stąd liczba stopni swobody obliczona z równania (G.3) w G.4.2 wynosi $v(d_2) = 8$ (patrz przykład z G.4.2). Wypadkową liczbę stopni swobody $u(d)$ otrzymujemy z równania (G.2b) w G.4.1

$$v_{\mathrm{eff}}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\dfrac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \dfrac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \dfrac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} = \frac{(9{,}7\ \mathrm{nm})^4}{\dfrac{(5{,}8\ \mathrm{nm})^4}{24} + \dfrac{(3{,}9\ \mathrm{nm})^4}{5} + \dfrac{(6{,}7\ \mathrm{nm})^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Niepewność różnicy współczynników rozszerzalności u*($\delta\alpha$) [H.1.3.5]. Oszacowania granic zmienności $\delta\alpha$ określone na $\pm 1\times 10^{-6}$ °C^{-1} wydają się być wiarygodne w 10 procentach, stąd z równania (G.3) w G.4.2 mamy $v(\delta\alpha)$ = 50.

4) *Niepewność różnicy temperatur płytek u*($\delta\theta$) [H.1.3.6]. Oszacowany przedział od –0,05 °C do +0,05 °C dla różnicy temperatur $\delta\theta$ oceniono jako wiarygodny tylko w 50 procentach, co zgodnie z równaniem (G.3) w G.4.2 daje $v(\delta\theta)$ = 2.

Obliczenie $v_{\mathrm{eff}}(l)$ z równania (G.2b) w G.4.1 prowadzi się w ten sam sposób jak obliczenie $v_{\mathrm{eff}}(d)$ w punkcie 2). Z równań (H.6b) i (H.6c) i dla wartości *v* podanych w 1) do 4) mamy

$$v_{\mathrm{eff}}(l) = \frac{(32\ \mathrm{nm})^4}{\dfrac{(25\ \mathrm{nm})^4}{18} + \dfrac{(9{,}7\ \mathrm{nm})^4}{25{,}6} + \dfrac{(2{,}9\ \mathrm{nm})^4}{50} + \dfrac{(16{,}6\ \mathrm{nm})^4}{2}} = 16{,}7$$

Aby otrzymać niepewność rozszerzoną, obcinamy najpierw tę wartość do najbliższej mniejszej liczby całkowitej przyjmując $v_{\mathrm{eff}}(l) = 16$. Następnie korzystając z tabeli G.2 w aneksie G otrzymuje się $t_{99}(16) = 2{,}92$, stąd $U_{99} = t_{99}\, u_c(l) = 2{,}92 \times (32\ \mathrm{nm}) = 93\ \mathrm{nm}$. Postępując zgodnie z 7.2.4, końcowy wynik pomiaru można podać jako:

> l = (50,000 838 ± 0,000 093) mm, gdzie liczba za symbolem ± jest wartością niepewności rozszerzonej $U = k\, u_c$, obliczoną na podstawie niepewności standardowej złożonej u_c = 32 nm i współczynnika rozszerzenia $k = 2{,}92$ określonym z rozkładu *t*-Studenta dla stopni swobody v = 16 i wyznacza przedział, którego poziom ufności szacuje się na 99 %. Odpowiednia względna niepewność rozszerzona wynosi $U/l = 1{,}9\times 10^{-6}$.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.1.7 Wyrazy drugiego rzędu

W uwadze do 5.1.2 stwierdzono, że równanie (10), używane w powyższym przykładzie do wyznaczania niepewności standardowej złożonej $u_c(l)$, powinno być rozszerzone, gdy nieliniowość funkcji $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ jest na tyle znacząca, że nie można pominąć wyrazów wyższego rzędu w rozwinięciu funkcji w szereg Taylora. Taki przypadek występuje w tym przykładzie i dlatego wyznaczenie niepewności $u_c(l)$ nie jest kompletne. Uwzględniając w równaniu (H.3) wyrażenie podane w uwadze do 5.1.2, trzeba faktycznie dodać do równania (H.5) dwa różne niezaniedbywalne wyrazy drugiego rzędu. Wyrazy te pochodzą z członów kwadratowych wyrażenia w uwadze z 5.1.2 i mają postać

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

ale tylko pierwszy z nich daje istotny wkład do $u_c(l)$:

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0,05\ \mathrm{m})(0,58 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})(0,41\ °\mathrm{C}) = 11,7\ \mathrm{nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0,05\ \mathrm{m})(1,2 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})(0,029\ °\mathrm{C}) = 1,7\ \mathrm{nm}$$

Wyrazy drugiego rzędu zwiększają $u_c(l)$ z 32 nm do 34 nm.

H.2 Równoczesny pomiar rezystancji i reaktancji

Przykład pokazuje sposób postępowania w przypadku wielu menzurandów lub wielkości wyjściowych określanych równocześnie w tym samym pomiarze i przyjęcia korelacji między ich estymatami. Rozważane są tylko przypadkowe zmiany w obserwacjach. W rzeczywistości niepewności poprawek oddziaływań systematycznych mogą także wnosić swój wkład do niepewności wyniku pomiaru. Dane są analizowane dwoma różnymi sposobami dającymi te same wyniki.

H.2.1 Koncepcja pomiaru

Rezystancja R i reaktancja X elementu obwodu są określane przez pomiar amplitudy V sinusoidalnie zmiennego napięcia na jego końcówkach, amplitudy I natężenia prądu przemiennego przepływającego przezeń oraz kąta przesunięcia fazowego ϕ napięcia względem natężenia prądu. Tak więc mamy trzy wielkości wejściowe, to jest V, I i ϕ. Wielkościami wyjściowymi – menzurandami – są trzy parametry impedancji R, X i Z. Ponieważ $Z^2 = R^2 + X^2$, tylko dwie z nich są niezależne.

H.2.2 Model matematyczny i dane

Menzurandy są związane z wielkościami wejściowymi prawem Ohma:

$$R = \frac{V}{I}\cos\phi; \quad X = \frac{V}{I}\sin\phi; \quad Z = \frac{V}{I} \tag{H.7}$$

Rozważmy pięć niezależnych zbiorów jednoczesnych obserwacji trzech wielkości wejściowych V, I i ϕ otrzymanych w warunkach powtarzalności (patrz B.2.15), a ich wyniki zestawiono w tabeli H.2. W tabeli podano także średnie arytmetyczne obserwacji oraz odchylenia standardowe eksperymentalne średnich obliczone z równań (3) i (5), przedstawionych w rozdziale 4.2. Średnie arytmetyczne są najlepszymi estymatami wartości oczekiwanych wielkości wejściowych, a odchylenia standardowe eksperymentalne są miarami niepewności standardowych tych średnich.

Ponieważ średnie arytmetyczne $\bar{V}$, $\bar{I}$ i $\bar{\phi}$ są wyznaczane z wyników równoczesnych obserwacji, to są one skorelowane i korelacje między nimi należy uwzględniać przy obliczaniu niepewności standardowych wielkości R, X i Z. Współczynniki korelacji można wyznaczyć z równania (14) w 5.2.2 na podstawie wartości $s(\bar{V}, \bar{I})$,

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$s(\bar{V},\bar{\phi})$ i $s(\bar{I},\bar{\phi})$ obliczonych z równania (17) w rozdziale 5.2.3. Wyniki obliczeń podano w tabeli H.2. Warto przypomnieć, że zachodzi zawsze $r(x_i,x_j)=r(x_j,x_i)$ i $r(x_i,x_i)=1$.

Tab. H.2 – Wartości wielkości wejściowych V, I i ϕ otrzymane w pięciu jedoczesnych pomiarach

Numer zbioru k	Wielkości wejściowe		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Średnia arytmetyczna	$\bar{V}$ = 4,9990	$\bar{I}$ = 19,6610	$\bar{\phi}$ = 1,044 46
Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej	$s(\bar{V})$ = 0,0032	$s(\bar{I})$ = 0,0095	$s(\bar{\phi})$ = 0.000 75
Współczynniki korelacji			
$r(\bar{V},\bar{I})$ = – 0,36			
$r(\bar{V},\bar{\phi})$ = 0,86			
$r(\bar{I},\bar{\phi})$ = – 0,65			

H.2.3 Wyniki obliczeń: sposób 1

Wyniki obliczeń przeprowadzone pierwszym sposobem przedstawiono w tabeli H.3.

Wartości trzech menzurandów R, X i Z wyznaczono z równań (H.7), podstawiając w miejsce V, I i ϕ średnie arytmetyczne $\bar{V}$, $\bar{I}$ i $\bar{\phi}$ z tabeli H.2. Niepewności standardowe R, X i Z wyznaczono z równania (16) w 5.2.2, gdyż, jak wspomniano wyżej, wielkości wejściowe $\bar{V}$, $\bar{I}$ i $\bar{\phi}$ są skorelowane. Jako przykład rozważymy równanie $Z=\bar{V}/\bar{I}$. Oznaczając V jako x_1, I jako x_2 i f jako $Z=\bar{V}/\bar{I}$, otrzymuje się z równania (16) z 5.2.2 niepewność standardową złożoną Z

$$u_{\mathrm{c}}^2(Z)=\left(\frac{1}{\bar{I}}\right)^2 u^2(\bar{V})+\left(\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)^2 u^2(\bar{I})+2\left(\frac{1}{\bar{I}}\right)\left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)u(\bar{V})\,u(\bar{I})\,r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8a}$$

$$=Z^2\left(\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right)^2+Z^2\left(\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right)^2-2\,Z^2\left(\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right)\left(\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right)r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8b}$$

albo

$$u_{\mathrm{c,r}}^2(\bar{Z})=u_{\mathrm{r}}^2(\bar{V})+u_{\mathrm{r}}^2(\bar{I})-2u_{\mathrm{r}}(\bar{V})u_{\mathrm{r}}(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8c}$$

gdzie $u(\bar{V})=s(\bar{V})$ i $u(\bar{I})=s(\bar{I})$, a wskaźnik "r" w ostatnim wyrażeniu wskazuje, że u jest niepewnością względną. Podstawiając odpowiednie wartości z tabeli H.2 do równania (H.8a) otrzymuje się $u_{\mathrm{c}}(Z)$ = 0,236 Ω.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Ponieważ trzy menzurandy, czyli wielkości wyjściowe, zależą od tych samych wielkości wejściowych, są one także skorelowane. Elementy macierzy kowariancji, które opisują tę korelację można zapisać jako

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_m} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \qquad \text{(H.9)}$$

Gdzie $y_l = f_l(x_1, x_2, ..., x_N)$ i $y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_N)$. Równanie (H.9) jest uogólnieniem równania (F.2) w F.1.2.3, gdy wielkości q_l w tym wyrażeniu są skorelowane. Oszacowane współczynniki korelacji wielkości wyjściowych są dane jako $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)/u(y_l)u(y_m)$, co wynika z równania (14) w 5.2.2. Należy zauważyć, że elementy diagonalne macierzy kowariancji $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ są oszacowaniami wariancji wielkości wyjściowych y_l, (patrz 5.2.2, uwaga 2) i że dla $m = l$ równanie (H.9) jest identyczne z równaniem (16) w 5.2.2.

Stosując równanie (H.9) do rozważanego przykładu należy przyjąć:

$y_1 = R \qquad x_1 = \bar{V} \qquad u(x_i) = r(x_i)$

$y_2 = X \qquad x_2 = \bar{I} \qquad N = 3$

$y_3 = Z \qquad x_3 = \bar{\phi}$

Wyniki obliczeń R, X i Z oraz oszacowań ich wariancji i współczynników korelacji podano w tabeli H.3.

Tab. H.3 – Wartości wielkości wyjściowych R, X i Z: sposób 1

Indeks menzurandu l	Zależność między estymatą menzurandu y_l i estymatami wielkości wejściowych x_i	Wartość estymaty y_l, która jest wynikiem pomiaru	Niepewność standardowa złożona $u_c(y_l)$ wyniku pomiaru
1	$y_1 = R = (\bar{V}/\bar{I})\cos\bar{\phi}$	$y_1 = R = 127,732\ \Omega$	$u_c(R) = 0,071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0,06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V}/\bar{I})\sin\bar{\phi}$	$y_2 = X = 219,847\ \Omega$	$u_c(X) = 0,295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0,13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V}/\bar{I}$	$y_3 = Z = 254,260\ \Omega$	$u_c(R) = 0,236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,09 \times 10^{-2}$
Współczynniki korelacji $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0,588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0,485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,993$			

H.2.4 Wyniki obliczeń: sposób 2

Wyniki obliczeń przeprowadzone drugim sposobem zebrano w tabeli H.4.

Ponieważ dane wejściowe mają postać pięciu zbiorów obserwacji trzech wielkości wejściowych V, I i ϕ, dla *każdego zbioru* danych wejściowych można obliczyć wartości R, X i Z, a następnie wyznaczyć ich najlepsze

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

estymaty jako średnie arytmetyczne pięciu obliczonych wartości R, X i Z. Odchylenie standardowe każdej średniej (które jest niepewnością standardową złożoną) oblicza się zwykłym sposobem z pięciu pojedynczych wartości [równanie (5) w 4.2.3]. Oszacowane kowariancje dla trzech średnich oblicza się z równania (17), w punkcie 5.2.3, bezpośrednio dla pięciu pojedynczych wartości, z których wyznaczona jest średnia. Nie ma żadnych różnic, jeśli chodzi o wartości wielkości wyjściowych, niepewności standardowe i oszacowane kowariancje otrzymane tymi dwoma sposobami. Różnice mogą tylko wystąpić jako efekty drugiego rzędu związane z zastąpieniem wyrazów takich jak $\bar{V}/\bar{I}$ i $\cos\bar{\varphi}$ przez $\overline{V/I}$ i $\overline{\cos\varphi}$.

Dla ilustracji tego podejścia, wartości R, X i Z obliczone z każdego z pięciu zbiorów obserwacji podano w tabeli H.4. Z wartości tych bezpośrednio obliczono średnie arytmetyczne, niepewności standardowe i oszacowane współczynniki korelacji. Uzyskane w ten sposób wartości liczbowe różnią się nieznacznie od wyników podanych w tabeli H.3.

Tab. H.4 – Wartości wielkości wyjściowych R, X i Z: sposób 2

Numer zbioru	Pojedyncze wartości menzurandów		
k	$R=(V/I)\cos\phi$ (Ω)	$X=(V/I)\sin\phi$ (Ω)	$Z=V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Średnia arytmetyczna	$y_1=\bar{R}=127,732$	$y_2=\bar{X}=219,847$	$y_3=\bar{Z}=254,260$
Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej	$s(\bar{R})=0,071$	$s(\bar{X})=0,295$	$s(\bar{Z})=0,236$
Współczynniki korelacji $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1,y_2)=r(\bar{R},\bar{X})=-0,588$ $r(y_1,y_3)=r(\bar{R},\bar{Z})=-0,485$ $r(y_2,y_3)=r(\bar{X},\bar{Z})=0,993$			

Według terminologii z uwagi w 4.1.4 sposób drugi jest przykładem wyznaczania estymaty y ze wzoru $\bar{Y}=\sum_{k=1}^{N}Y_k\big/n$, a sposób pierwszy przykładem obliczania estymaty y ze wzoru $y=f(\bar{X}_1,\bar{X}_2,...,\bar{X}_N)$. Jak zaznaczono w tej uwadze, obydwa sposoby liczenia dają identyczne wyniki, jeśli f jest funkcją liniową wielkości wejściowych (pod warunkiem, że przy liczeniu sposobem pierwszym bierze się pod uwagę eksperymentalnie zaobserwowane współczynniki korelacji). Jeśli f nie jest funkcją liniową, wyniki uzyskane sposobem pierwszym różnią się od wyników uzyskanych sposobem drugim, a różnica zależy od stopnia nieliniowości oraz od oszacowanych wariancji i kowariancji X_i. Wynika to z zależności

$$y=f(\bar{X}_1,\bar{X}_2,...,\bar{X}_N)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{X}_i\partial\bar{X}_j}u(\bar{X}_i,\bar{X}_j)+\ldots \qquad \text{(H.10)}$$

gdzie drugi człon po prawej stronie jest wyrazem drugiego rzędu w rozwinięciu funkcji f w szereg Taylora względem $\bar{X}_i$ (patrz także 5.1.2, uwaga). W omawianym przypadku preferuje się sposób drugi, ponieważ

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

pozwala on uniknąć przybliżenia $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_N)$ i lepiej oddaje stosowaną procedurę pomiarową – dane były faktycznie zebrane w zbiory.

Sposób drugi może być jednak nieodpowiedni, jeśli dane w tabeli H.2 reprezentują $n_1 = 5$ obserwacji napięcia V, po których wykonano $n_2 = 5$ obserwacji prądu I, a potem $n_3 = 5$ obserwacji kąta przesunięcia fazowego ϕ. Sposobu drugiego nie można także stosować, jeśli liczby obserwacji są różne, $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (Jest to faktycznie nie najlepsza procedura pomiarowa, gdyż napięcie na określonej impedancji i prąd przepływający przez nią są ściśle związane).

Jeśli dane w tabeli H.2 zinterpretować tak, że sposób drugi obliczania nie jest odpowiedni i jeśli przyjąć, że między wielkościami V, I, i ϕ nie ma korelacji, wtedy wyliczone współczynniki korelacji nie mają żadnego znaczenia i należy przyjąć je za równe zeru. Jeśli dokonamy takiej zmiany w tabeli H.2, równanie (H.9) sprowadza się do równoważnego równaniu (F.2) w F.1.2.3, mianowicie

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i) \qquad \text{(H.11)}$$

i jego zastosowanie do danych w tabeli H.2 prowadzi do zmian wartości podanych w tabeli H.3, co pokazano w tabeli H.5.

Tab. H.5 – Zmiany w tabeli H.3 przy założeniu, że współczynniki korelacji w tabeli H.2 są równe zeru

Niepewności standardowe złożone $u_c(u_l)$ wyników pomiaru
$u_c(R) = 0{,}195\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09 \times 10^{-2}$
$u_c(R) = 0{,}204\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08 \times 10^{-2}$
Współczynniki korelacji $r(y_l, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0{,}056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0{,}527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}878$

H.3 Wzorcowanie termometru

Przykład pokazuje sposób wyznaczania liniowej krzywej wzorcowania metodą najmniejszych kwadratów oraz sposób korzystania z parametrów krzywej wzorcowania i oszacowań ich wariancji i kowariancji przy wyznaczaniu wartości i niepewności standardowej przewidywanej poprawki.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.3.1 Problem pomiarowy

Termometr wzorcuje się porównując $n = 11$ odczytanych z niego temperatur t_k, o zaniedbywalnych niepewnościach, z odpowiadającymi im temperaturami odniesienia $t_{\mathrm{R},k}$ z przedziału temperatury od 21 °C do 27 °C i wyznaczając poprawki $b_k = t_{\mathrm{R},k} - t_k$ odczytów termometru. *Zmierzone* poprawki b_k i zmierzone temperatury t_k są wielkościami wejściowymi obliczeń. Liniowa krzywa wzorcowania

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \tag{H.12}$$

jest liniową aproksymacją zależności między zmierzonymi poprawkami i odpowiadającymi im temperaturami, wyznaczoną metodą najmniejszych kwadratów. Parametry y_1 i y_2, to jest odpowiednio przesunięcie (czyli rzędna punktu przecięcia krzywej wzorcowania z osią rzędnych) i współczynnik nachylenia krzywej wzorcowania są dwoma menzurandami, czyli wielkościami wyjściowymi, które mają być określone. Wartość temperatury t_0 jest wybrana arbitralnie i nie jest parametrem określanym metodą najmniejszych kwadratów. Po wyznaczeniu wartości y_1 i y_2 oraz oszacowań ich wariancji i kowariancji, równanie (H.12) można wykorzystać do określania wartości poprawki oraz niepewności standardowej poprawki wskazania termometru dla dowolnej wartości t temperatury.

H.3.2 Dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów

W oparciu o metodę najmniejszych kwadratów i zgodnie z założeniami przedstawionymi w H.3.1, wielkości wyjściowe y_1 i y_2 oraz oszacowane ich wariancje i kowariancje wyznacza się minimalizując sumę

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[b_k - y_1 - y_2(t - t_0) \right]^2$$

Prowadzi to do następujących równań określających y_1 i y_2, ich wariancje eksperymentalne $s^2(y_1)$ i $s^2(y_2)$ oraz oszacowany współczynnik korelacji $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / s(y_1) s(y_2)$, gdzie $s(y_1, y_2)$ jest oszacowaną kowariancją

$$y_1 = \frac{\left(\sum b_k\right)\left(\sum \theta_k^2\right) - \left(\sum b_k \theta_k\right)\left(\sum \theta_k\right)}{D} \tag{H.13a}$$

$$y_2 = \frac{n\left(\sum b_k \theta_k\right) - \left(\sum b_k\right)\left(\sum \theta_k\right)}{D} \tag{H.13b}$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \tag{H.13c}$$

$$s^2(y_2) = n \frac{s^2}{D} \tag{H.13d}$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}} \tag{H.13e}$$

$$s^2 = \frac{\sum \left[b_k - b(t_k) \right]^2}{n - 2} \tag{H.13f}$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - \left(\sum \theta_k\right)^2 = n \sum \left(\theta_k - \bar{\theta}\right)^2 = n \sum \left(t_k - \bar{t}\right)^2 \tag{H.13g}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

gdzie sumuje się od k = 1 do n; $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ i $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ jest różnicą między zmierzoną lub zaobserwowaną poprawką b_k dla temperatury t_k i poprawką $b(t_k)$ przewidywaną dla temperatury t_k z krzywej wzorcowania $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$. Wariancja s^2 jest miarą całkowitej niepewności aproksymacji krzywej wzorcowania, natomiast czynnik $n - 2$ odzwierciedla fakt, że liczba stopni swobody wariancji s^2 wynosi $v = n - 2$, ponieważ z n obserwacji określa się dwa parametry y_1 i y_2 (patrz G.3.3).

H.3.3 Obliczenia wyniku pomiaru

Dane, do których należy dopasować krzywą wzorcowania są podane w drugiej i trzeciej kolumnie tabeli H.6. Przyjmując t_0 = 20 °C jako temperaturę odniesienia, otrzymuje się ze wzorów (H.13a) do (H.13g) następujące wartości

$$y_1 = -0{,}171\,2\ °\mathrm{C} \qquad s(y_1) = 0{,}002\,9\ °\mathrm{C}$$
$$y_2 = 0{,}002\,18 \qquad s(y_2) = 0{,}000\,67$$
$$r(y_1, y_2) = -0{,}930 \qquad s = 0{,}003\,5\ °\mathrm{C}$$

Ponieważ współczynnik nachylenia krzywej y_2 ma ponad trzy razy większą wartość od jego niepewności standardowej, to przy pomiarze temperatury powinno się stosować poprawki dane przez krzywą wzorcowania, a nie stałą uśrednioną poprawkę.

Tab. H.6 – Dane użyte do wyznaczenia liniowej krzywej wzorcowania termometru otrzymane metodą najmniejszych kwadratów

Numer odczytu k	Odczyt termometru t_k (°C)	Poprawka zaobserwowana $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°C)	Poprawka prognozowana $b(t_k)$ (°C)	Różnica między poprawkami zaobserwowaną i prognozowaną $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	–0,171	–0,167 9	–0,003 1
2	22,012	–0,169	–0,166 8	–0,002 2
3	22,512	–0,166	–0,165 7	–0,000 3
4	23,003	–0,159	–0,164 6	+0,005 6
5	23,507	–0,164	–0,163 5	–0,000 5
6	23,999	–0,165	–0,162 5	–0,002 5
7	24,513	–0,156	–0,161 4	+0,005 4
8	25,002	–0,157	–0,160 3	+0,003 3
9	25,503	–0,159	–0,159 2	+0,000 2
10	26,010	–0,161	–0,158 1	–0,002 9
11	26,511	–0,160	–0,157 0	–0,003 0

Krzywa wzorcowania ma postać

$$b(t) = -0{,}171\,2(29)\ °\mathrm{C} + 0{,}002\,18(67)(t - 20\ °\mathrm{C}) \tag{H.14}$$

gdzie liczby w nawiasach są wartościami liczbowymi niepewności standardowych odniesionymi do ostatnich cyfr odpowiadających im wartości przesunięcia i współczynnika nachylenia, (patrz 7.2.2). Powyższe równanie określa przewidywane wartości poprawki $b(t)$ dla dowolnej temperatury t, a w szczególności wartość $b(t_k)$ dla $t = t_k$. Przewidywane wartości poprawek zamieszczono w czwartej kolumnie tabeli H.6, natomiast w kolumnie piątej podano różnice między wartościami poprawek zmierzonymi i przewidzianymi $b_k - b(t_k)$. Analiza tych

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

różnic może być wykorzystana do sprawdzenia zasadności stosowania modelu liniowego. Istnieją formalne testy służące do tego celu (patrz [8]), ale nie będą tu rozważane.

H.3.4 Niepewność wartości przewidywanej

Wyrażenie określające niepewność standardową złożoną przewidywanej wartości poprawki można otrzymać stosując prawo propagacji niepewności, równanie (16) z 5.2.2 do równania (H.12). Oznaczając $b(t) = f(y_1, y_2)$ oraz kładąc $u(y_1) = s(y_1)$ i $u(y_1) = s(y_1)$ otrzymujemy

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2) \quad \text{(H.15)}$$

Oszacowana wariancja $u_c^2[b(t)]$ osiąga minimum dla $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$, co w danym przypadku wynosi $t_{\min}$ = 24,008 5 °C.

Jako przykład stosowania równania (H.15) rozważmy wyznaczanie poprawki i jej niepewności dla temperatury t = 30 °C, a więc temperatury spoza zakresu temperatur, dla którego termometr był wzorcowany. Podstawiając $t = 30\ °\mathrm{C}$ do równania (H.14) otrzymuje się

b(30 °C) = −0,149 4 °C

a do równania (H.15)

$u_c^2[b(30\ °\mathrm{C})]$ = (0,0029 °C)^2 + (10 °C)^2 (0,000 67)^2 + 2 (10 °C)(0,0029 °C)(0,000 67) (–0,930)

= 17,1 × 10^{-6} °C^2

czyli

u_c [b(30 °C)] = 0,004 1 °C

Tak więc poprawka dla temperatury 30 °C jest równa −0,1494 °C z niepewnością standardową złożoną u_c = 0,0041 °C i posiadającą $\nu = n - 2$ = 9 stopni swobody.

H.3.5 Eliminacja korelacji między współczynnikiem nachylenia i przesunięciem

Z równania (H.13e) określającego współczynnik korelacji $r(y_1, y_2)$ wynika, że dobierając t_0 spełniające $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_0) = 0$, osiąga się $r(y_1, y_2) = 0$ i nieskorelowane y_1 i y_2, co upraszcza obliczenie niepewności standardowej przewidywanej poprawki. Ponieważ $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$ dla $t_0 = \bar{t} = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \Big/ n$, w rozpatrywanym przypadku $\bar{t}$ = 24,008 5 °C, to powtórzenie procedury dopasowania krzywej wzorcowania metodą najmniejszych kwadratów dla $t_0 = \bar{t}$ = 24,008 5 °C doprowadziłoby do nieskorelowanych wartości y_1 i y_2. (Temperatura $\bar{t}$ jest także temperaturą, w której $u_c^2[b(t)]$ osiąga minimum – patrz H.3.4). Jednakże powtarzanie procedury dopasowania jest niepotrzebne, gdyż można wykazać, że

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \quad \text{(H.16a)}$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})u^2(y_2) \quad \text{(H.16b)}$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \quad \text{(H.16c)}$$

gdzie

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

przy czym w zapisie równania (H.16a) dokonano podstawień $u(y_1') = s(y_1')$ i $u(y_2) = s(y_2)$ [patrz równanie (H.15)].

Wykorzystując te zależności w obliczeniach z H.3.2 otrzymuje się

$$b(t) = -0{,}162\,5(11) + 0{,}002\,18(67)\,(t - 24{,}008\,5\ °\mathrm{C}) \qquad \text{(H.17a)}$$

$$u_\mathrm{c}^2[b(t)] = (0{,}001\,1)^2 + (t - 24{,}008\,5\ °\mathrm{C})^2\,(0{,}000\,67)^2 \qquad \text{(H.17b)}$$

To, że powyższe wyrażenia dają takie same wyniki jak równania (H.14) i (H.15), można sprawdzić powtarzając obliczenia dla b(30 °C) i $u_\mathrm{c}[b(30\ °\mathrm{C})]$. Podstawiając t = 30 °C do równań (H.17a) i H.17b) otrzymuje się

b(30 °C) = −0,149 4 °C

$u_\mathrm{c}[b(30\ °\mathrm{C})]$ = 0,004 1 °C

a więc wyniki identyczne z otrzymanymi w H.3.4. Oszacowaną kowariancję między dwoma przewidywanymi poprawkami można wyznaczyć z równania (H.9) w H.2.3.

H.3.6 Rozważania dodatkowe

Metodę najmniejszych kwadratów można stosować do aproksymacji zbiorów danych punktów krzywymi wyższych rzędów, można ją także stosować, gdy poszczególne dane są obarczone niepewnościami. Szczegółowe wiadomości o metodzie najmniejszych kwadratów znaleźć można w [8]. Tu podamy tylko dwa przykłady, w których przyjmuje się założenie, że zmierzone poprawki b_k nie są dokładnie znane.

1) Załóżmy, że każda wartość t_k posiada zaniedbywalną niepewność i każda z n wartości $t_{\mathrm{R},k}$ została wyznaczona z serii m powtórzonych odczytów, a połączona estymata wariancji tych odczytów oparta na dużej ilości danych otrzymanych w ciągu kilku miesięcy jest równa s_p^2. Oszacowana wariancja każdej $t_{\mathrm{R},k}$ wynosi $s_\mathrm{p}^2 / m = u_0^2$ i każda zaobserwowana poprawka $b_k = t_{\mathrm{R},k} - t_k$ ma taką *samą* niepewność standardową u_0. W tych warunkach (i przy założeniu, że nie ma powodu do uznania modelu liniowego za niewłaściwy) u_0^2 zastępuje s^2 w równaniach (H.13c) i (H13d).

   UWAGA Połączoną estymatę wariancji s_p^2 opartą na N seriach niezależnych obserwacji tej samej zmiennej losowej otrzymuje się z wzoru

$$s_\mathrm{p}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

   gdzie s_i^2 jest wariancją z próby *i*-tej serii n_i powtórzonych niezależnych obserwacji [równanie (4) w 4.2.2] posiadającą $\nu_i = n_i - 1$ stopni swobody. Liczba stopni swobody s_p^2 wynosi $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. Wariancja eksperymentalna s_p^2 / m (i odchylenie standardowe eksperymentalne $s_\mathrm{p} / \sqrt{m}$) średniej arytmetycznej m niezależnych obserwacji charakteryzowanych przez połączoną estymatę wariancji s_p^2 ma także ν stopni swobody.

2) Przypuścimy, że każda z wartości t_k posiada zaniedbywalną niepewność i każda z n wartości $t_{\mathrm{R},k}$ jest korygowana za pomocą poprawki ε_k oraz każda poprawka ma taką samą niepewność standardową u_a.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Niepewność standardowa każdej wartości $b_k = t_{\mathrm{R},k} - t_k$ jest wówczas równa u_{a} i $s^2(y_1)$ zostaje zastąpione przez $s^2(y_1) + u_{\mathrm{a}}^2$, a $s^2(y_1')$ przez $s^2(y_1') + u_{\mathrm{a}}^2$.

H.4 Pomiar aktywności

Przykład H.4 jest podobny do przykładu H.2, jednoczesnego pomiaru rezystancji i reaktancji, w którym dane można analizować dwoma różnymi sposobami prowadzącymi do jednakowych wyników liczbowych. Sposób pierwszy ilustruje ponownie potrzebę wzięcia pod uwagę zaobserwowanych korelacji między wielkościami wejściowymi.

H.4.1 Problem pomiarowy

Aktywność masową radonu (^{222}Rn) w próbce wody określa się przez zliczanie scyntylacji w tej próbce i porównaniu ich liczby z liczbą scyntylacji w próbce wzorcowej o znanej aktywności właściwej radonu w wodzie. Nieznaną aktywność wyznacza się zliczając scyntylacje pochodzące z trzech źródeł zawierających w przybliżeniu po 5 g wody i 12 g organicznego scyntylatora emulsyjnego w fiolkach o pojemności 22 ml:

Źródło (a) *próbka wzorcowa* zawierający roztwór wzorcowy o masie m_{S} i znanej aktywności właściwej masowej,

Źródło (b) odpowiednio dobrana *próbka ślepa* zawierająca wodę bez materiału radioaktywnego, używana do znalezienia promieniowania tła,

Źródło (c) *próbka badana* o masie m_x i nieznanej aktywności właściwej masowej.

Wykonano sześć cykli pomiarów zliczających scyntylacje trzech źródeł w następującym porządku: wzorzec – próbka ślepa – próbka badana. Czas zliczania T_0 dla każdego źródła w każdym z sześciu cykli był równy 60 minut. I chociaż nie można przyjąć aktywności tła za stałą w czasie trwania całego pomiaru (65 godzin), to jednak natężenie zliczeń scyntylacji w próbce ślepej można uznać za reprezentatywne dla tła w czasie pomiarów próbki wzorcowej i próbki badanej wykonywanych w tym samym cyklu. Otrzymane wyniki zamieszczono w tabeli H.7, gdzie

t_{S}, t_{B}, t_x są czasami liczonymi od czasu odniesienia $t = 0$ do środków interwałów zliczania $T_0 = 60\ \mathrm{min}$ dla próbki wzorcowej, próbki ślepej i próbki badanej, odpowiednio; czas t_{B} jest podany dla kompletności wyników, gdyż jego znajomość nie jest potrzebna do obliczeń,

C_{S}, C_{B}, C_x są liczbami zliczonych scyntylacji zarejestrowanymi w interwałach zliczania $T_0 = 60\ \mathrm{min}$ dla próbki wzorcowej, próbki ślepej i próbki badanej, odpowiednio.

Zaobserwowane zliczenia można wyrazić następująco

$$C_{\mathrm{S}} = C_{\mathrm{B}} + \varepsilon A_{\mathrm{S}} T_0 m_{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\lambda t_{\mathrm{S}}} \tag{H.18a}$$

$$C_x = C_{\mathrm{B}} + \varepsilon A_x T_0 m_x \mathrm{e}^{-\lambda t_x} \tag{H.18b}$$

gdzie:

ε jest wydajnością detekcji scyntylacji w cieczy dla $^{222}\mathrm{Rn}$ w źródle o danym składzie, przy czym zakłada się, że wydajność jest niezależna od stopnia aktywności źródła,

A_{S} jest aktywnością masową wzorca w czasie odniesienia $t = 0$,

A_x jest *menzurandem* określonym jako nieznana aktywność masowa badanej próbki w czasie odniesienia $t = 0$,

m_{S} jest masą roztworu wzorcowego,

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

m_x jest masą próbki badanej,

λ jest stałą rozpadu dla ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$ = 1,258 94 ×10^{-4} min^{-1} ($T_{1/2}$ = 5 505,8 min).

Tab. H.7 – Dane obliczeniowe do wyznaczania aktywności masowej próbki

Cykl	Próbka wzorcowa		Próbka ślepa		Próbka badana	
k	t_S (min)	C_S (zliczenia)	t_B (min)	C_B (zliczenia)	t_x (min)	C_x (zliczenia)
1	243,74	15 380	305,56	4 054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1 046,10	3 922	1 107,66	38 706
3	1 723,87	14 394	1 785,43	4 200	1 846,99	35 860
4	2 463,17	13 254	2 524,73	3 830	2 586,28	32 238
5	3 217,56	12 516	3 279,12	3 956	3 340,68	29 640
6	3 956,83	11 058	4 018,38	3 980	4 079,94	26 356

Z równań (H.18a) i (H.18b) wynika, że poszczególnych wartości C_S i C_x podanych w tabeli H.7 nie można bezpośrednio uśrednić z powodu wykładniczego zaniku aktywności próbki wzorcowej i próbki badanej oraz nieznacznych zmian natężenia promieniowania tła w kolejnych cyklach. Należy więc wprowadzić korekcję liczby zliczeń (lub natężenia zliczeń określonego jako liczba zliczeń podzielona przez $T_0 = 60$ min) ze względu na zanik aktywności i występowania tła. Łącząc równania (H.18a) i (H.18b) otrzymuje się zależność wyrażającą nieznaną aktywność masową w funkcji wielkości znanych

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) = \\ = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_S}} = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_S - C_B)} \mathrm{e}^{\lambda(t_x - t_S)} \tag{H.19}$$

gdzie $(C_x - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_x}$ i $(C_S - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_S}$ są zliczeniami, skorygowanymi ze względu na promieniowanie tła, dla próbki badanej i próbki wzorcowej, w czasie odniesienia t = 0, dla czasu zliczania T_0 = 60 min. Powyższe można zapisać prościej

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \tag{H.20}$$

gdzie natężenia zliczeń R_x i R_S, skorygowane ze względu na zanik aktywności i promieniowanie tła, są wyrażone wzorami

$$R_x = [(C_x - C_B)/T_0]\mathrm{e}^{\lambda t_x} \tag{H.21a}$$

$$R_S = [(C_S - C_B)/T_0]\mathrm{e}^{\lambda t_S} \tag{H.21b}$$

H.4.2 Analiza danych

W tabeli H.8 zestawiono wartości natężeń zliczeń R_x i R_S, skorygowanych ze względu na zanik aktywności i promieniowanie tła, obliczone z równań (H.21a) i (H21b) na podstawie danych w tabeli H.7 i podanej wcześniej wartości stałej rozpadu λ = 1,258 94 ×10^{-4} min^{-1}. Warto zauważyć, że stosunek $R = R_x/R_S$ najprościej oblicza się z wyrażenia

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$[(C_x - C_\mathrm{B})/(C_\mathrm{S} - C_\mathrm{B})]\mathrm{e}^{\lambda(t_x - t_\mathrm{S})}$$

Średnie arytmetyczne $\bar{R}_\mathrm{S}$, $\bar{R}_x$ i $\bar{R}$ oraz ich odchylenia standardowe eksperymentalne $s(\bar{R}_\mathrm{S})$, $s(\bar{R}_x)$ i $s(\bar{R})$ oblicza się w zwykły sposób [równania (3) i (5) w 4.2]. Współczynnik korelacji $r(\bar{R}_x, \bar{R}_\mathrm{S})$ oblicza się z równania (17) w 5.2.3 i równania (14), podanego w 5.2.2.

Z powodu stosunkowo małej zmienności wartości R_x i R_S, stosunek wartości średnich $\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S}$ i niepewność standardowa $u(\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S})$ tego stosunku są bardzo bliskie wartościami odpowiednio do średniej $\bar{R}$ i jej niepewności standardowej $s(\bar{R})$, jak podano w ostatniej kolumnie tabeli H.8 [patrz H.2.4 i równanie (H.10)]. Jednakże przy obliczaniu niepewności standardowej $u(\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S})$ z równania (16) w 5.2.2 należy wziąć pod uwagę korelację między R_x i R_S reprezentowaną przez współczynnik korelacji $r(\bar{R}_x, \bar{R}_\mathrm{S})$. [Równanie to daje dla oszacowanej wariancji względnej $\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S}$ trzy ostatnie człony równania (H.22b)].

Warto zauważyć, że odchylenia standardowe eksperymentalne wielkości R_x i R_S są odpowiednio $\sqrt{6}s(\bar{R}_x)$ i $\sqrt{6}s(\bar{R}_\mathrm{S})$. Wskazują, że zmienność tych wielkości jest dwa do trzech razy większa, niż zmienność wynikająca ze statystyki Poissona, modelującej proces zliczania scyntylacji. Zmienność ta jest bowiem włączona w obserwowaną zmienność liczby scyntylacji i nie trzeba brać jej oddzielnie pod uwagę.

Tab. H.8 – Obliczone natężenia zliczeń skorygowane ze względu na zanik aktywnościi promieniowanie tła

Cykl k	R_x (min^{-1})	R_S (min^{-1})	$t_x - t_\mathrm{S}$ (min)	$R = R_x/R_\mathrm{S}$
1	652,46	194,65	123,63	3,352 0
2	666,48	208,58	123,13	3,192 3
3	665,68	211,08	123,12	3,154 3
4	655,68	214,17	123,11	3,061 5
5	651,87	213,92	123,12	3,047 3
6	623,31	194,13	123,11	3,210 7
	$\bar{R}_x = 652,60$ $s(\bar{R}_x) = 6,42$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0,98\times10^{-2}$	$\bar{R}_\mathrm{S} = 206,09$ $s(\bar{R}_\mathrm{S}) = 3,79$ $s(\bar{R}_\mathrm{S})/\bar{R}_\mathrm{S} = 1,84\times10^{-2}$		$\bar{R} = 3,170$ $s(\bar{R}) = 0,046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1,44\times10^{-2}$
	$\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S} = 3,167$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S}) = 0,045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S})/(\bar{R}_x/\bar{R}_\mathrm{S}) = 1,42\times10^{-2}$			
Współczynnik korelacji				
$r(\bar{R}_x, \bar{R}_\mathrm{S}) = 0,646$				

H.4.3 Obliczanie wyników końcowych

Do obliczenia nieznanej aktywności masowej A_X i jej niepewności standardowej złożonej $u_c(A_x)$ z równania (H.20) trzeba znać wartości A_S, m_x i m_S oraz ich niepewności standardowe. Wynoszą one

A_S = 0,136 8 Bq/g

$u(A_S)$ = 0,001 8 Bq/g $\quad u(A_S)/A_S$ = 1,32×10^{-2}

m_S = 5,019 2 g

$u(m_S)$ = 0,005 g $\quad u(m_S)/m_S$ = 0,10×10^{-2}

m_x = 5,057 1 g

$u(m_x)$ = 0,001 0 g $\quad u(m_x)/m_x$ = 0,02×10^{-2}

Oceniono jako zaniedbywalne inne możliwe źródła niepewności:

– niepewności standardowe czasów zaniku $u(t_{S,k})$ i $u(t_{x,k})$;
– niepewność standardową stałej rozpadu radonu ^{222}R $u(\lambda)$ = 1 × 10^{-7} min^{-1}. (Istotną wielkością jest współczynnik zaniku exp[$\lambda\,(t_x - t_S)$], który zmienia się od wartości 1,015 63 w cyklach k = 4 i 6 do wartości 1,015 70 w cyklu k = 1. Niepewność standardowa tych wartości wynosi u = 1,2 × 10^{-5});
– niepewność związana z możliwą zależnością wydajności detekcji licznika scyntylacyjnego od użytego źródła (próbka wzorcowa, próbka ślepa, próbka badana);
– niepewność poprawki na czasu zliczania oraz niepewność poprawki na zależność wydajności zliczania od poziomu aktywności.

H.4.3.1 Wyniki obliczeń: sposób 1

Jak wspomniano wcześniej A_x i $u_c(A_x)$ można wyznaczyć dwoma sposobami z równania (H.20). W pierwszym sposobie oblicza się A_x na podstawie średnich arytmetycznych $\bar{R}_x$ i $\bar{R}_S$ co daje

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_S} = 0{,}430\ 0 \text{ Bg/g} \qquad \text{(H.22a)}$$

Stosując do powyższego równanie (16) z 5.2.2 otrzymuje się wariancję złożoną

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_x)}{\bar{R}_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_S)}{\bar{R}_S^2} - 2r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)\frac{u(\bar{R}_x)u(\bar{R}_S)}{\bar{R}_x \bar{R}_S} \qquad \text{(H.22b)}$$

gdzie, jak już wspomniano w H.4.2, trzy ostatnie człony dają $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S)^2$, oszacowaną wariancję względną ilorazu $\bar{R}_x/\bar{R}_S$. Zgodnie z rozważaniami z punktu H.2.2 wyniki zawarte w tabeli H.8 wskazują, że $\bar{R}$ nie jest ściśle równe $\bar{R}_x/\bar{R}_S$, jak również niepewność standardowa $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ nie jest ściśle równa niepewności standardowej $s(\bar{R})$ związanej z $\bar{R}$.

Podstawiając wartości odpowiednich wielkości do równań (H.22a) i (H.22b) otrzymuje się

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}93 \times 10^{-2}$$

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$u_c(A_x)$ = 0,008 3 Bq/g

Wynik pomiaru może więc być podany w postaci:

A_x = 0,430 0 Bq/g ze niepewnością standardową złożoną u_c = 0,008 3 Bq/g.

H.4.3.2 Wyniki obliczeń: sposób 2

W drugim sposobie, które pozwala uniknąć korelacji między $\bar{R}_x$ i $\bar{R}_S$, A_x oblicza się na podstawie średniej arytmetycznej $\bar{R}$

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \bar{R} = 0{,}430\ 4 \text{ Bq/g} \tag{H.23a}$$

Wyrażenie określające $u_c^2(A_x)$ jest prostsze

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R})}{\bar{R}^2} \tag{H.23b}$$

na jego podstawie obliczamy

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}95 \times 10^{-2}$$

$u_c(A_x)$ = 0,008 4 Bq/g

Wynik pomiaru może więc być podany w postaci:

A_x = 0,430 4 Bq/g z niepewnością standardową złożoną u_c = 0,008 4 Bq/g.

Liczbę wypadkowych stopni swobody u_c można oszacować ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a w sposób przedstawiony w H.1.6.

Podobnie jak w H.2, preferuje się drugi sposób postępowania, ponieważ pozwala on uniknąć przybliżenia średniej stosunku dwóch wielkości przez stosunek średnich dwóch wielkości i lepiej oddaje stosowaną procedurę pomiarową – dane były faktycznie gromadzone w odrębnych cyklach.

Tym niemniej różnica między wartościami A_x otrzymywanymi tymi dwoma sposobami jest bezspornie mała w porównaniu z niepewnością standardową przypisaną każdej z otrzymanych wartości. Również różnica między niepewnościami standardowymi dla obu wartości jest zaniedbywalna. Zgodność taka dowodzi, że oba opisane sposoby postępowania są równoważne, jeżeli właściwie uwzględni się obserwowane korelacje.

H.5 Analiza wariancji

Przykład jest wprowadzeniem do metod analizy wariancji (ANOVA). Techniki statystyczne obejmowane tą nazwą są używane do identyfikacji i określania jakościowego pojedynczych *oddziaływań przypadkowych* na pomiar, tak że oddziaływania te mogą być w sposób właściwy uwzględnione przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru. Metody ANOVA znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach pomiarowych, na przykład przy wzorcowaniu wzorców, takich jak wzorce napięcia i wzorce masy oraz przy certyfikacji materiałów odniesienia, metodami ANOVA nie można jednak identyfikować oddziaływań systematycznych.

Istnieje wiele różnych modeli postępowania objętych ogólną nazwą ANOVA. Ze względu na swoją ważność, w niniejszym przykładzie pokazano zrównoważony schemat grupowania. Liczbową ilustracją tego schematu jest przykład wzorcowaniu wzorców napięcia Zenera. Przedstawiona analiza powinna być przydatna w wielu praktycznych zastosowaniach pomiarowych.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Analiza wariancji ma specjalne znaczenie przy certyfikacji materiałów odniesienia podczas badań międzylaboratoryjnych, zagadnienie to omówiono dokładnie w Przewodniku ISO 35 [19] (krótki opisu takiej certyfikacji materiału odniesienia patrz H.5.3.2). Ponieważ wiele materiału zawartego w Przewodniku ISO 35 ma szerokie praktyczne zastosowanie, niniejsza publikacja może służyć jedynie jako uzupełniający poradnik co do dodatkowych szczegółów dotyczących ANOVA, w tym także niezrównoważonych schematów grupowania. Podobną funkcję mogą spełniać publikacje [15] i [20].

H.5.1 Problem pomiarowy

Rozważamy wzorzec napięcia Zenera o nominalnej wartości 10 V, wzorcowany w stosunku do stałego napięcia odniesienia przez okres dwóch tygodni. Każdego spośród J dni w ciągu tego okresu wykonuje się K niezależnych obserwacji napięcia V_S wzorca. Jeżeli V_{jk} oznacza *k*-tą obserwację V_S ($k = 1, 2, ..., K$) wykonaną *j*-tego dnia ($j = 1, 2, ..., J$), to najlepszą estymatą napięcia V_S wzorca jest średnia arytmetyczna $\bar{V}$ obserwacji JK [patrz równanie (3) w 4.2.1]

$$V_S = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \bar{V} \qquad \text{(H.24a)}$$

Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej $s(\bar{V})$, będące miarą niepewności $\bar{V}$ jako estymaty napięcia wzorca, otrzymuje się z [patrz równanie (5) w 4.2.3]

$$s^2(\bar{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \bar{V})^2 \qquad \text{(H.24b)}$$

UWAGA W tym przykładzie zakłada się, że wszystkie poprawki stosowane do wyników obserwacji w celu kompensacji oddziaływań systematycznych mają zaniedbywalne niepewności lub też niepewności ich są takie, że można je uwzględnić na końcu analizy. Poprawka tego rodzaju, która może być wprowadzona do wartości średniej z obserwacji na zakończenie analizy, jest różnicą między wartością certyfikowaną (mającą z założenia daną niepewność) i wartością roboczą stabilnego napięcia odniesienia, w stosunku do którego jest wzorcowany wzorzec napięcia Zenera. Tak więc estymata napięcia wzorca otrzymana z obserwacji metodami statystycznymi nie musi być koniecznie końcowym wynikiem pomiaru. Również odchylenie standardowe eksperymentalne tej estymaty nie musi być koniecznie niepewnością standardową złożoną wyniku końcowego.

Odchylenie standardowe eksperymentalne wartości średniej $s(\bar{V})$ otrzymane z równania (H.24b) jest właściwą miarą niepewności $\bar{V}$ jedynie wtedy, gdy zmienność wyników obserwacji z upływem dni jest taka sama jak ich zmienność w ciągu pojedynczego dnia. Jeżeli zmienność z upływem dni jest znaczna większa, niż można tego oczekiwać na podstawie zmienności obserwowanej w ciągu pojedynczego dnia, to zastosowanie równania (H.24b) może doprowadzić do uzyskania zaniżonej wartości niepewności średniej $\bar{V}$. Nasuwają się więc dwa pytania: w jaki sposób można zdecydować, czy zmienność międzydniowa (charakteryzowana przez międzydniową składową wariancji) jest znacząca w porównaniu ze zmiennością jednodniową (charakteryzowaną przez jednodniową składową wariancji), oraz, jeżeli tak jest, jak powinno się obliczać niepewność średnią?

H.5.2 Przykład liczbowy

H.5.2.1 Dane pozwalające na zadanie powyższych pytań zamieszczono w tabeli H.9 gdzie:

J = 10 jest liczbą dni, w których dokonywano obserwacji napięcia,

K = 5 jest liczbą obserwacji napięcia dokonywanych każdego dnia

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad \text{(H.25a)}$$

jest średnią arytmetyczną K = 5 obserwacji napięcia dokonanych *j*-tego dnia (istnieje J = 10 takich dziennych średnich)

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$\bar{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\bar{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}V_{jk} \qquad \text{(H.25b)}$$

jest średnią arytmetyczną J = 10 dziennych średnich i średnią wszystkich JK = 50 obserwacji

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \qquad \text{(H.25c)}$$

jest wariancją eksperymentalną K = 5 obserwacji dokonanych *j*-tego dnia (istnieje J = 10 takich estymat wariancji)

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\bar{V}_j - \bar{V})^2 \qquad \text{(H.25d)}$$

jest wariancją eksperymentalną K = 10 średnich dziennych (istnieje tylko jedna taka estymata wariancji).

H.5.2.2 Zgodność zmienności jednodniowej i międzydniowej dokonanych obserwacji można badać porównując dwie niezależne estymaty σ_{W}^2, jednodniowej składowej wariancji (to jest wariancji obserwacji dokonanych tego samego dnia).

Pierwszą estymatę σ_{W}^2, oznaczoną przez s_{a}^2, otrzymuje się z obserwacji zmienności średnich dziennych $\bar{V}_j$. Ponieważ $\bar{V}_j$ jest średnią z K obserwacji, to oszacowana jej wariancja $s^2(\bar{V}_j)$, przy założeniu, że międzydniowa składowa wariancji jest równa zeru, estymuje σ_{w}^2/K. Z równania (H.25d) wynika bowiem, że

$$s_{\mathrm{a}}^2 = Ks^2(\bar{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\bar{V}_j - \bar{V})^2 \qquad \text{(H.26a)}$$

jest estymatą σ_{W}^2 mającą $\nu_{\mathrm{a}} = J - 1 = 9$ stopni swobody.

Druga estymata σ_{W}^2, oznaczona przez s_{b}^2, jest połączoną estymatą wariancji otrzymaną z J = 10 pojedynczych wartości $s^2(V_{jk})$, daną równaniem z uwagi w H.3.6. Dziesięć pojedynczych wartości $s^2(V_{jk})$ oblicza się z równania (H.25c). Ponieważ liczba stopni swobody każdej z tych wartości jest równa $\nu_i = K - 1$, to końcowym wyrażeniem określającym s_{b}^2 jest po prostu ich średnia. Tak więc

$$s_{\mathrm{b}}^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}s^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \qquad \text{(H.26b)}$$

jest estymatą σ_{W}^2 mającą $\nu_{\mathrm{b}} = J\,(K - 1) = 40$ stopni swobody.

Estymaty σ_{W}^2 dane równaniami (H.26a) i (H.26b) wynoszą odpowiednio $s_{\mathrm{a}}^2 = (128\ \mu\mathrm{V})^2$ i $s_{\mathrm{b}}^2 = (85\ \mu\mathrm{V})^2$. Ponieważ estymata s_{a}^2 jest oparta na zmienności średnich dziennych, zaś estymata s_{b}^2 jest oparta na zmienności dziennych obserwacji, to ich różnica wskazuje na możliwość istnienia czynnika, który zmienia się z dnia na dzień, ale pozostaje względnie stały, gdy obserwacji dokonuje się w ciągu pojedynczego dnia. Do weryfikacji hipotezy o zerowej wartości międzydniowej składowej wariancji służy test F-Snedecora.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.5.2.3 Rozkład F-Snedecora jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa stosunku $F(\nu_a, \nu_b) = s_a^2(\nu_a) / s_b^2(\nu_b)$ dwu niezależnych estymat $s_a^2(\nu_a)$ i $s_b^2(\nu_b)$ wariancji σ^2 zmiennej losowej o rozkładzie normalnym [15]. Parametry ν_a i ν_b są odpowiednio liczbami stopni swobody tych estymat, a $0 \le F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Wartości F są stabelaryzowane dla różnych wartości ν_a i ν_b i różnych kwantyli rozkładu F. Wartość $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,95}$ lub $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (wartość krytyczna) jest zwykle interpretowana jako wskazująca, że $s_a^2(\nu_a)$ jest większe niż $s_b^2(\nu_b)$ w sposób znaczący statystycznie i, że prawdopodobieństwo wartości F tak dużej jest zaobserwowana, jeżeli dwie estymaty były estymatami tej samej wariancji, jest mniejsze odpowiednio niż 0,05 lub 0,025. (Można wybrać także inne wartości krytyczne, np. $F_{0,99}$).

Tab. H.9 – Dane z wzorcowania wzorca napięcia otrzymane w ciągu J = 10 dni, każda średnia dzienna $\bar{V}_j$ i odchylenie standardowe eksperymentalne $s(V_{jk})$ jest oparte na K = 5 niezależnych powtórzonych obserwacjach

Wielkość	**Dzień**, j				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
$\bar{V}_j / V$	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106
$s(V_{jk}) / \mu V$	60	77	111	101	67
Wielkość	**Dzień**, j				
	6	7	8	9	10
$\bar{V}_j / V$	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk}) / \mu V$	93	80	73	88	86
$\bar{V} = 10,000\,097\ V$ $\quad s(\bar{V}_j) = 57\ \mu V$					
$s_a^2 = Ks^2(\bar{V}_j) = 5(57\ \mu V)^2 = (128\ \mu V)^2$ $\quad s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu V)^2$					

H.5.2.4 Stosując test F-Snedecora do niniejszego przykładu liczbowego mamy

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{5\,(57\ \mu V)^2}{(85\ \mu V)^2} = 2,25 \qquad \text{(H.27)}$$

z $\nu_a = J - 1 = 9$ stopniami swobody licznika i $\nu_b = J\,(K - 1) = 40$ stopniami swobody mianownika. Ponieważ $F_{0,95}(9,40) = 2,12$ i $F_{0,975}(9,40) = 2,45$ można wnioskować, że na poziomie istotności 5 % występuje statystycznie znaczący wpływ czynnika międzydniowego, natomiast nie występuje przy poziomie istotności 2,5 %.

H.5.2.5 Jeżeli odrzuca się istnienie czynnika międzydniowego, ponieważ różnica między s_a^2 i s_b^2 jest oceniana jako statystycznie nieistotna (jest to decyzja nierozważna, ponieważ może prowadzić do niedoszacowania niepewności), to oszacowaną wariancję $s^2(\bar{V})$ średniej $\bar{V}$ należy obliczać z równania (H.24b). Jest to równoważne połączeniu estymat s_a^2 i s_b^2 (to znaczy biorąc średnią ważoną s_a^2 i s_b^2, z wagami równymi odpowiednio liczbom stopni swobody ν_a i ν_b – patrz uwaga do H.3.6) co daje najlepszą

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

estymatę obserwacji i podzieleniu tej estymaty przez liczbę obserwacji JK, co daje najlepszą estymatę $s^2(\bar{V})$ wariancji średniej obserwacji. Postępując zgodnie z tą procedurą otrzymuje się

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_{\mathrm{a}}^2 + J(K-1)s_{\mathrm{b}}^2}{JK(JK-1)} = \frac{9\,(128\,\mu\mathrm{V})^2 + 40\,(85\,\mu\mathrm{V})^2}{(10)\,(5)\,(49)} \tag{H.28a}$$

$$s^2(\bar{V}) = (13\,\mu\mathrm{V})^2 \text{ lub } s(\bar{V}) = 13\,\mu\mathrm{V} \tag{H.28b}$$

przy czym $s(\bar{V})$ ma $JK - 1 = 49$ stopni swobody.

Zakładając, że wszystkie poprawki ze względu na oddziaływania systematyczne zostały wprowadzone i że wszystkie inne składowe niepewności są zaniedbywalne, wynik wzorcowania podajemy jako $V_{\mathrm{S}} = \bar{V} = 10{,}000\ 097$ V (patrz tabela H.9) ze standardową niepewnością złożoną $s(\bar{V}) = u_{\mathrm{c}} = 13\ \mu\mathrm{V}$ i z u_{c} mającym 49 stopni swobody.

UWAGA 1 W praktyce możliwe jest także występowanie dodatkowych znaczących składowych niepewności, które muszą być połączone ze składową niepewności otrzymaną z obserwacji metodami statystycznymi.

UWAGA 2 Można wykazać, że równanie (H.28a) dla $s^2(\bar{V})$ jest równoważne równaniu (H.24b). Wystarcza zapisać podwójną sumę z równania (H.24b), oznaczoną tu przez S, w postaci

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[(V_{jk} - \bar{V}_j) + (\bar{V}_j - \bar{V})\right]^2 = (J-1)s_{\mathrm{a}}^2 + J(K-1)s_{\mathrm{b}}^2$$

H.5.2.6 Jeżeli przyjmuje się istnienie wpływu międzydniowego (decyzja rozważna, ponieważ pozwala uniknąć możliwego niedoszacowania niepewności) i założy się jego losowy charakter, to wariancja $s^2(\bar{V}_j)$ obliczona z $J = 10$ dziennych średnich zgodnie z równaniem (H.25d) będzie estymatą nie $\sigma_{\mathrm{w}}^2 / K$, jak postulowano w H.5.2.2, ale $\sigma_{\mathrm{w}}^2 / K + \sigma_{\mathrm{B}}^2$, gdzie σ_{B}^2 jest międzydniową losową składową wariancji. Stąd wniosek, że

$$s^2(\bar{V}_j) = s_{\mathrm{w}}^2 / K + s_{\mathrm{B}}^2 \tag{H.29}$$

gdzie s_{w}^2 estymuje σ_{w}^2, a s_{B}^2 estymuje σ_{B}^2. Ponieważ $\overline{s^2(\bar{V}_j)}$ wyliczone z równania (H.26b) zależy jedynie od jednodniowej zmienności obserwacji, to można przyjąć, że $s_{\mathrm{w}}^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$. Zatem iloraz $Ks^2(\bar{V}_j) / \overline{s^2(V_{jk})}$ użyty w teście *F*-Snedecora w H.5.2.4 przyjmuje postać

$$F = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_{\mathrm{w}}^2 + Ks_{\mathrm{B}}^2}{s_{\mathrm{w}}^2} = \frac{5\,(57\,\mu\mathrm{V})^2}{(85\,\mu\mathrm{V})^2} = 2{,}25 \tag{H.30}$$

co prowadzi do

$$s_{\mathrm{B}}^2 = \frac{Ks^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \tag{H.31a}$$

$$s_{\mathrm{B}}^2 = (43\,\mu\mathrm{V})^2 \text{ lub } s_{\mathrm{B}} = 43\,\mu\mathrm{V}$$

$$s_{\mathrm{w}}^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\,\mu\mathrm{V})^2 \text{ lub } s_{\mathrm{w}} = 85\,\mu\mathrm{V} \tag{H.31b}$$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Oszacowaną wariancję $\overline{V}$ otrzymuje się z $s^2(\overline{V}_j)$, równanie (H.25d), ponieważ $s^2(\overline{V}_j)$ w sposób właściwy odzwierciedla istnienie jednodniowej i międzydniowej składowej losowej wariancji [patrz równanie (H.29)]. Zatem

$$s^2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j)\big/J = (57\ \mu\mathrm{V})^2\big/10 \text{ lub } s^2(\overline{V}) = 18\ \mu\mathrm{V} \qquad \text{(H.32)}$$

gdzie $s(\overline{V})$ ma $J - 1 = 9$ stopni swobody.

Liczba stopni swobody s_w^2 (i tak samo s_w) jest równa $J(K-1) = 40$ [patrz równanie (H.26b)]. Liczba stopni swobody s_B^2 (i tak samo s_B) jest równa liczbie wypadkowych stopni swobody różnicy $s_\mathrm{B}^2 = s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}\big/K$ [równanie (H.31a)], ale jej oszacowanie jest problematyczne.

H.5.2.7 Najlepszą estymatą napięcia wzorca jest więc $V_\mathrm{S} = \overline{V} = 10{,}000\ 097\ \mathrm{V}$ z niepewnością $s(\overline{V}) = u_\mathrm{c} = 18\ \mu\mathrm{V}$ daną przez równanie (H.32). Powyższą wartość u_c z jej 9 stopniami swobody należy porównać z wartością $u_\mathrm{c} = 13\ \mu\mathrm{V}$ z jej 49 stopniami swobody, to jest z wynikiem otrzymanym w punkcie H.5.2.5 [równanie (H.28b)] przy odrzuceniu istnienia wpływu czynnika międzydniowego.

W faktycznie wykonywanych pomiarach, widoczny wpływ międzydniowy powinien być dodatkowo, o ile to możliwe, zbadany, w celu określenia jego przyczyn i stwierdzenia, czy występuje oddziaływanie systematyczne, które uniemożliwiłoby stosowanie metody analizy wariancji. Jak wskazano na początku przykładu, technika ANOVA została opracowana dla identyfikacji i wyznaczania składowych niepewności powstających w wyniku oddziaływań losowych. Nie mogą one dostarczyć informacji o składowych powstających w wyniku oddziaływań systematycznych.

H.5.3 Rola analizy wariancji w pomiarach

H.5.3.1 Przykład dotyczący wzorca napięcia ilustruje schemat jednostopniowy i zrównoważony analizy wariancji. Jest to schemat jednostopniowy, ponieważ przyjmuje jeden stopień „grupowania” obserwacji, według jednego czynnika zmieniającego się w trakcie pomiarów, a mianowicie dnia, w którym obserwacja została dokonana. Jest to schemat zrównoważony, ponieważ codziennie dokonywana jest taka sama liczba obserwacji. Analiza przedstawiona w niniejszym przykładzie może być stosowana do określenia, czy w danym pomiarze występuje „wpływ związany z osobą eksperymentatora”, „wpływ związany z przyrządem pomiarowym”, „wpływ związany z laboratorium”, „wpływ związany z próbką pomiarową” lub nawet „wpływ związany z metodą pomiaru”. Tak więc w niniejszym przykładzie można wyobrazić sobie zastąpienie obserwacji wykonywanych w ciągu *J* różnych dni przez obserwacje wykonywane tego samego dnia, ale przez J różnych eksperymentatorów. Składowa międzydniowa wariancji stanie się wtedy składową wariancji związaną z różnymi eksperymentatorami.

H.5.3.2 Jak wspomniano w H.5 analiza wariancji jest powszechnie stosowana przy certyfikacji materiałów odniesienia poprzez testy międzylaboratoryjne. Tego typu certyfikacja polega zwykle na wykonaniu w pewnej liczbie niezależnych i jednakowo kompetentnych laboratoriów pomiarów właściwości próbek materiału, względem której materiał jest certyfikowany. Zakłada się przy tym, że różnice pomiędzy poszczególnymi wynikami, zarówno wewnątrz laboratorium, jak i między laboratoriami, mają charakter statystyczny niezależnie od ich przyczyn. Każdą średnią z pomiarów wykonanych w danym laboratorium uważa się za nieobciążoną estymatę tej właściwości materiału, a za najlepsze oszacowanie tej właściwości przyjmuje się zwykle nieważoną średnią arytmetyczną średnich otrzymanych w poszczególnych laboratoriach.

W procesie certyfikacji materiału odniesienia uczestniczy I różnych laboratoriów, z których każde dokonuje pomiarów interesującej właściwości w J różnych próbkach materiału, przy czym każdy pomiar składa się z K niezależnych obserwacji. Całkowita liczba obserwacji wynosi IJK, a całkowita liczba próbek wynosi IJ. Jest to przykład analizy wariancji według schematu zrównoważonego i dwustopniowego podobnego do schematu jednostopniowego z wyżej podanego przykładu dotyczącego wzorca napięcia. Istnieją tu dwa poziomy grupowania obserwacji według dwóch różnych czynników, próbki i laboratorium, zmieniających się w trakcie

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

pomiaru. Schemat jest zrównoważony, ponieważ każda próbka jest poddawana obserwacji taką samą ilość razy (K) w każdym laboratorium, a każde laboratorium wykonuje pomiary na takiej samej liczbie próbek (J). Podobnie jak w cytowanym przykładzie, w przypadku materiału odniesienia, celem analizy danych jest zbadanie możliwości istnienia wpływu czynnika międzypróbkowego i czynnika międzylaboratoryjnego oraz określenie właściwej niepewności, którą należy przypisać najlepszej estymacie wartości certyfikowanej właściwości. Zgodnie z poprzednimi stwierdzeniami za najlepszą estymatę przyjmuje się średnią średnich otrzymanych w I laboratoriach, która jest także średnią z IJK obserwacji.

H.5.3.3 W 3.4.2 wskazano na znaczenie statystycznej oceny niepewności wyniku pomiaru w sytuacjach, w których zależy on od zmienności wielkości wejściowych. Schemat wielostopniowego grupowania danych oraz analiza wyników pomiarów metodami ANOVA mogą być z powodzeniem stosowane w wielu sytuacjach pomiarowych spotykanych w praktyce.

Tym niemniej, jak to wskazano w 3.4.1, zmienianie wszystkich wielkości wejściowych, z powodu ograniczonego czasu i środków, jest rzadko kiedy wykonalne. W praktyce, w najlepszym przypadku można określić metodami analizy wariancji jedynie kilka składowych niepewności. Jak to już zauważono w 4.3.1, wiele składowych niepewności musi być wyznaczanych na drodze oceny naukowej wykorzystującej wszelkie dostępne informacje dotyczące możliwej zmienności wielkości wejściowych będących przedmiotem zainteresowania. W wielu przypadkach składowa niepewności powstająca w wyniku wpływów czynnika międzypróbkowego, międzylaboratoryjnego, międzyprzyrządowego lub czynnika związanego ze zmianą eksperymentatora, nie może być wyznaczona za pomocą statystycznej analizy serii obserwacji i musi być określona na podstawie dostępnych informacji.

H.6 Pomiary w skali odniesienia: twardość

Twardość jest przykładem cech obiektów fizycznych, której nie można określać ilościowo bez powiązania z metodą pomiaru, twardość nie ma jednostki niezależnej od metody. Wielkość "twardość" różni się od klasycznych wielkości mierzalnych tym, że nie może wchodzić do równań algebraicznych definiujących inne wielkości mierzalne (choć jest czasem używana w równaniach empirycznych, które wiążą twardość z innymi właściwościami określonej kategorii materiałów). Wartość twardości określa się za pomocą konwencjonalnego pomiaru liniowego wymiaru odcisku w bloku danego materiału, czyli w *próbce*. Pomiar wykonuje się zgodnie z ustaloną normą, zawierającą opis "wgłębnika", opis budowy przyrządu, w której wgłębnik jest stosowany oraz sposób obsługi tego przyrządu. Istnieje wiele norm i skal twardości.

Twardość uważa się za funkcję (zależną od skali) mierzonego wymiaru liniowego. W podanym przykładzie jest to funkcja liniowa średniej arytmetycznej głębokości pięciu kolejnych odcisków, ale przy zastosowaniu innej skali funkcja ta będzie nieliniowa.

Realizacje przyrządu wzorcowego są utrzymywane jako wzorce krajowe (nie istnieje realizacja wzorca międzynarodowego). Porównanie między określonym twardościomierzem a *państwowym przyrządem wzorcowym* przeprowadza się przy użyciu *przenośnego wzorca twardości*.

H.6.1 Problem pomiarowy

Przedmiotem rozważań naszego przykładu jest pomiar twardości próbki materiału według skali "Rockwella C" twardościomierzem wywzorcowanym za pomocą państwowego przyrządu wzorcowego do pomiaru twardości. Jednostka skali twardości Rockwella C jest równa 0,002 mm, twardość w skali Rockwella określa się jako 100 × (0,002 mm) minus średni trwały przyrost głębokości pięciu odcisków wyrażony w mm. Wartość tej wielkości dzielona przez jednostkę skali Rockwella (0,002 mm) nazywa się "wskaźnikiem twardości HRC". W niniejszym przykładzie wielkość ta jest nazywana po prostu "twardością" i oznaczana symbolem $h_{\text{Rockwell C}}$. Wartość liczbowa twardości wyrażona w jednostkach skali Rockwella jest nazywana "wskaźnikiem twardości" i oznaczana symbolem $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Model matematyczny

Do średniego trwałego przyrostu głębokości odcisków wykonanych w próbce przez twardościomierz użyty do określenia twardości, czyli *twardościomierz wzorcowany*, należy dodać poprawki pozwalające na określenie

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

średniego trwałego przyrostu głębokości odcisków jakie na tej samej próbce wykonałby państwowy twardościomierz wzorcowy. Zatem

$$h_{\text{Rockwell C}} = f(\bar{d}, \Delta_{\text{c}}, \Delta_{\text{b}}, \Delta_{\text{S}}) = 100\,(0{,}002\ \text{mm}) - \bar{d} - \Delta_{\text{c}} - \Delta_{\text{b}} - \Delta_{\text{S}} \tag{H.33a}$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} \big/ (0{,}002\ \text{mm}) \tag{H.33b}$$

gdzie

$\bar{d}$ jest średnią głębokością pięciu odcisków wykonanych w próbce przez twardościomierz wzorcowany,

Δ_{c} jest poprawką otrzymaną z porównania twardościomierza wzorcowanego z państwowym twardościomierzem wzorcowym przeprowadzonego przy użyciu przenośnego wzorca twardości, równą średniemu przyrostowi głębokości 5m odcisków wykonanych w tej próbce przez twardościomierz wzorcowy minus średni przyrost głębokość 5n odcisków wykonanych w tej samej próbce przez twardościomierz wzorcowany,

Δ_{b} jest różnicą twardości (wyrażoną jako różnica średniego przyrostu głębokości odcisków) dwu części wzorca twardości, na których wykonano kolejne odciski przez dwa twardościomierze, przyjmuje się ją jako równą zeru,

Δ_{S} jest błędem spowodowanym brakiem powtarzalności państwowego twardościomierza wzorcowego i niekompletną definicją twardości. Chociaż trzeba założyć, że Δ_{S} jest równe zeru, to jednak istnieje związana z nim niepewność standardowa $u(\Delta_{\text{S}})$.

Ponieważ pochodne cząstkowe $\partial f / \partial \bar{d}$, $\partial f / \partial \Delta_{\text{c}}$, $\partial f / \partial \Delta_{\text{b}}$ i $\partial f / \partial \Delta_{\text{S}}$ funkcji f z równania (H.33) są równe –1, to niepewność standardowa złożona $u_{\text{c}}^2(h)$ twardości próbki zmierzonej twardościomierzem wzorcowanym jest dana wzorem

$$u_{\text{c}}^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_{\text{c}}) + u^2(\Delta_{\text{b}}) + u^2(\Delta_{\text{S}}) \tag{H.34}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu $h = h_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.3 Wariancje składowe

H.6.3.1 Niepewność średniego przyrostu głębokości odcisku $\bar{d}$ w próbce, $u(\bar{d})$

Niepewność powtarzanych obserwacji. Dokładne powtórzenie obserwacji nie jest możliwe, ponieważ nowy odcisk nie może być wykonany w miejscu poprzedniego. Ponieważ każdy odcisk musi zostać wykonany w innym miejscu, to każda zmiana wyników zawiera w sobie wpływ zmiany twardości w zależności od zmiany miejsca. Przyjmuje się, że $u(\bar{d})$, to jest niepewność standardowa średniego przyrostu głębokości pięciu odcisków w próbce wykonanych przez twardościomierz wzorcowany, wyraża się jako $s_{\text{p}}(d_k) \big/ \sqrt{5}$, gdzie $s_{\text{p}}(d_k)$ jest połączonym odchyleniem standardowym eksperymentalnym dla głębokości odcisków określonych za pomocą „powtórzonych” pomiarów na próbce ściśle jednorodnej pod względem twardości (por. 4.2.4).

Niepewność wskazania. Chociaż poprawka dla $\bar{d}$ związana ze wskazaniem twardościomierza wzorcowanego jest równa zeru, to istnieje niepewność $\bar{d}$ spowodowana niepewnością wskazania głębokości wynikającą z rozdzielczości δ wskazania dana wzorem $u^2(\delta) = \delta^2 \big/ 12$ (por. F.2.2.1). Oszacowana wariancja $\bar{d}$ jest więc równa

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \qquad \text{(H.35)}$$

H.6.3.2 Niepewność poprawki na różnicę między dwoma twardościomierzami, $u(\Delta_c)$

Jak wskazano w H.6.2 Δ_c jest poprawką na różnicę między państwowym twardościomierzem wzorcowym i twardościomierzem wzorcowanym. Poprawka ta może być wyrażona jako $\Delta_c = z'_S - z'$, gdzie $z'_S = \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{z}_{S,i}\right)/m$ jest średnim przyrostem głębokości 5*m* odcisków wykonanych państwowym twardościomierzem wzorcowym w próbce twardości, a $z' = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\right)/n$ jest średnim przyrostem głębokości 5*n* odcisków wykonanych w tej samej próbce twardościomierzem wzorcowanym. Tak więc zakładając, że przy porównaniu niepewność związana z rozdzielczością odczytu każdego twardościomierza jest zaniedbywalna, otrzymujemy oszacowaną wariancję Δ_c

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s^2_{av}(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s^2_{av}(\bar{z})}{n} \qquad \text{(H.36)}$$

gdzie

$s^2_{av}(\bar{z}_S) = \left[\sum_{i=1}^{m} s^2(\bar{z}_{S,i})\right]/m$ jest średnią wariancji eksperymentalnych średnich każdej z m serii odcisków $z_{S,ik}$ wykonanych przez twardościomierz wzorcowy,

$s^2_{av}(\bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^{n} s^2(\bar{z}_i)\right]/n$ jest średnią wariancji eksperymentalnych średnich każdej z n serii odcisków z_{ik} wykonanych przez twardościomierz wzorcowany.

UWAGA Wariancje $s^2_{av}(\bar{z}_S)$ i $s^2_{av}(\bar{z})$ są połączonymi estymatami wariancji – patrz dyskusja równania (H.26b) w H.5.2.2.

H.6.3.3 Niepewność poprawki wynikającej ze zmian twardości przenośnego wzorca twardości, $u(\Delta_b)$

Zalecenia międzynarodowe R 12 OIML, *Sprawdzanie i kalibracja wzorców twardości skali Rockwella C* wymagają, aby maksymalny i minimalny trwały przyrost głębokości odcisków otrzymanych z pięciu pomiarów na przenośnym wzorcu twardości nie różniły się więcej niż o część *x* średniego trwałego przyrostu głębokości odcisku, gdzie x jest funkcją stopnia twardości. Niech maksymalna różnica trwałych przyrostów głębokości odcisków na całym wzorcu będzie równa $x\,z'$, gdzie z' jest takie, jak określono w H.6.3.2 przy $n = 5$. Niech także maksymalna różnica będzie opisana trójkątnym rozkładem prawdopodobieństwa wokół średniej wartości $x\,z'/2$ (przy prawdopodobnym założeniu, że wartości bliskie wartości centralnej są bardziej prawdopodobne niż wartości oddalone – patrz 4.3.9). Następnie, jeżeli w równaniu (9b) w 4.3.9 $a = x\,z'/2$, to oszacowana wariancja poprawki dla średniego przyrostu głębokości odcisku ze względu na różnicę twardości próbki przy wykonywaniu pomiaru twardościomierzem wzorcowym i twardościomierzem wzorcowanym jest równa

$$u^2(\Delta_b) = (x\,z')/24 \qquad \text{(H.37)}$$

Zgodnie z H.6.2, zakłada się, że najlepszą estymatą poprawki Δ_b jest zero.

H.6.3.4 Niepewność państwowego twardościomierza wzorcowego i definicji twardości, $u(\Delta_S)$

Niepewność państwowego twardościomierza wzorcowego wraz z niepewnością spowodowaną niekompletnością definicji twardości przedstawia się jako oszacowane odchylenie standardowe $u(\Delta_S)$ (wielkość o wymiarze *długości*).

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H.6.4 Niepewność standardowa złożona, $u_c(h)$

Łącząc wyrażenia rozważane w punktach od H.6.3.1 do H.6.3.4 i podstawiając je do równania (H.34) otrzymuje się oszacowaną wariancję mierzonej twardości

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(x\,z')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \qquad \text{(H.38)}$$

Niepewnością standardową złożoną jest $u_c(h)$.

H.6.5 Przykład liczbowy

Dane do niniejszego przykładu zestawiono w tabeli H.10.

Tab. H.10 – Zestawienie danych do wyznaczania twardości próbki w skali Rockwella C

Źródło niepewności	Wartość
Średni trwały przyrost głębokości $\bar{d}$ pięciu odcisków wykonanych twardościomierzem wzorcowanym w próbce: 0,072 mm	36,0 jednostek skali Rockwella
Wskaźnik twardości próbki określony na podstawie pięciu odcisków: $H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}/(0,002\ \text{mm}) = [100(0,002\ \text{mm}) - 0,072\ \text{mm}]/(0,002\ \text{mm})$ (patrz H.6.1)	64,0 HRC
Połączone odchylenie standardowe eksperymentalne $s_p(d_k)$ trwałego przyrostu głębokości odcisków wykonanych twardościomierzem wzorcowanym w próbce o jednorodnej twardości	0,45 jednostek skali Rockwella
Rozdzielczość δ odczytu twardościomierza wzorcowanego	0,1 jednostek skali Rockwella
$s_{av}(\bar{z}_s)$ pierwiastek ze średniej eksperymentalnych wariancji średnich m serii odcisków wykonanych w przenośnym wzorcu twardości państwowym twardościomierzem wzorcowym	0,10 jednostek skali Rockwella, m = 6
$s_{av}(\bar{z})$ pierwiastek ze średniej eksperymentalnych wariancji średnich n serii odcisków wykonanych w przenośnym wzorcu twardości twardościomierzem wzorcowanym	0,11 jednostek skali Rockwella, n = 6
Dopuszczalna wariancja cząstkowa x przyrostu głębokości odcisku w przenośnym wzorcu twardości	$1,5 \times 10^{-2}$
Niepewność standardowa $u(\Delta_S)$ państwowego twardościomierza wzorcowego i definicji twardości	0,5 jednostek skali Rockwella

Używana jest skala Rockwella C, oznaczona symbolem HRC. Jednostką skali Rockwella jest 0,002 mm i stąd w tablicy H.10, a także dalej w tekście, rozumie się, że (na przykład) "36,0 jednostek skali Rockwella" znaczy 36,0 × (0,002 mm) = 0,072 mm i jest to po prostu wygodny sposób wyrażania danych i wyników.

Jeżeli wartości odpowiednich wielkości podane w tabeli H.10 zostaną podstawione do równania (H.38) to otrzymuje się następujące dwa wyrażenia:

$$u_c^2(h) = \left(\frac{0,45^2}{5} + \frac{0,1^2}{12} + \frac{0,10^2}{6} + \frac{0,11^2}{6} + \frac{(0,015 \times 36,0)^2}{24} + 0,5^2 \right) \text{(jednostka skali Rockwella)}^2$$

= 0,307 (jednostka skali Rockwella)^2

$u_c(h)$ = 0,55 jednostek skali Rockwella = 0,001 1 mm

gdzie, w celu obliczenia niepewności przyjęto jako właściwą wartość $z' = \bar{d} = 36,0$ jednostek skali Rockwella.

Zakładając, że $\Delta_c = 0$ otrzymuje się twardość próbki

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$h_{\text{Rockwell C}}$ = 64,0 jednostki skali Rockwella lub 0,128 0 mm z niepewnością standardową złożoną u_c = 0,55 jednostki skali Rockwella lub 0,001 1 mm.

Wskaźnik twardości próbki jest równy $h_{\text{Rockwell C}}$ /(0,002 mm) = (0,1280 mm)/(0,002 mm), lub

$H_{\text{Rockwell C}}$ = 64,0 HRC ze niepewnością standardową złożoną u_c = 0,55 HRC.

Oprócz składowej niepewności pochodzącej od państwowego twardościomierza wzorcowego i definicji twardości $u(\Delta_S)$ = 0,5 jednostki skali Rockwella, znaczącymi składowymi niepewności są składowa związana z powtarzalnością twardościomierza $s_p(d_k)\big/\sqrt{5} = 0{,}20$ jednostki skali Rockwella oraz ze zmienną twardością próbki wzorca twardości $(x\,z')^2\big/24 = 0{,}11$ jednostki skali Rockwella. Wypadkową liczbę stopni swobody u_c można wyznaczyć ze wzoru Welcha-Satterthwaite'a w sposób przedstawiony w H.1.6.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Aneks J*

Wykaz podstawowych symboli

a	szerokość połówkowa rozkładu prostokątnego możliwych wartości wielkości wejściowej X_i: $a = (a_+ + a_-)/2$
a_+	górna granica lub górne ograniczenie wielkości wejściowej X_i
a_-	dolna granica lub dolne ograniczenie wielkości wejściowej X_i
b_+	górna granica lub górne ograniczenie odchylenia wielkości wejściowej X_i od jej estymaty x_i: $b_+ = a_+ - x_i$
b_-	dolna granica lub dolne ograniczenie odchylenia wielkości wejściowej X_i od jej estymaty x_i: $b_- = x_i - a_-$
c_i	pochodna cząstkowa albo współczynnik wrażliwości: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$
f	związek funkcyjny pomiędzy menzurandem Y i wielkościami wejściowymi X_i, od których zależy Y i między estymatą wielkości wyjściowej y a estymatami wielkości wejściowych x_i, od których zależy y
$\partial f / \partial x_i$	pochodna cząstkowa względem wielkości wejściowej X_i, funkcji f będącej zależnością menzurandu Y od wielkości wejściowych X_i, wyznaczona na podstawie estymat x_i dla X_i $\partial f / \partial x_i \equiv \partial f / \partial X_i \big\|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$
k	współczynnik rozszerzenia stosowany do obliczania niepewności rozszerzonej $U = k\, u_c(y)$ estymaty wielkości wyjściowej y otrzymanej z jej niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$, gdzie U wyznacza przedział $Y = y \pm U$ o odpowiednio wysokim poziomie ufności
k_p	współczynnik rozszerzenia stosowany do obliczania niepewności rozszerzonej $U_p = k_p\, u_c(y)$ estymaty wielkości wyjściowej y otrzymanej z jej niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$, gdzie U_p wyznacza przedział $Y = y \pm U_p$ o odpowiednio wysokim poziomie ufności p
n	liczba powtórzonych obserwacji
N	liczba wielkości wejściowych X_i, od których zależy wielkość wejściowa Y
p	prawdopodobieństwo, poziom ufności: $0 \le p \le 1$
q	losowo zmienna wielkość opisana rozkładem prawdopodobieństwa
$\bar{q}$	średnia arytmetyczna n niezależnych powtórzonych obserwacji q_k losowo zmiennej wielkości q
	estymata wartości oczekiwanej μ_q rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej q
q_k	k-ta obserwacja losowo zmiennej wielkości q
$r(x_i, x_j)$	oszacowany współczynnik korelacji związany z estymatami x_i i x_j wielkości wejściowych X_i i X_j: $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) \big/ \left[u(x_i) u(x_j) \right]$

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	oszacowany współczynnik korelacji średnich arytmetycznych $\bar{X}_i$ i $\bar{X}_j$ określonych z n niezależnych par powtarzanych jednoczesnych obserwacji $X_{i,k}$ i $X_{j,k}$ wielkości wejściowych X_i i X_j: $r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \big/ s(\bar{X}_i) s(\bar{X}_j)$
$r(y_i, y_j)$	oszacowany współczynnik korelacji związany z estymatami y_i i y_j, kiedy dwa lub więcej menzurandów lub wielkości wyjściowych jest określanych w tym samym pomiarze
s_p^2	połączona estymata wariancji
s_p	połączone odchylenie standardowe eksperymentalne równe dodatniemu pierwiastkowi z s_p^2
$s^2(\bar{q})$	wariancja eksperymentalna średniej $\bar{q}$
	estymata wariancji σ^2/n średniej $\bar{q}$: $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
	oszacowana wariancja wyznaczona metodą typu A
$s(\bar{q})$	odchylenie standardowe eksperymentalne średniej $\bar{q}$, równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu $s^2(\bar{q})$
	obciążony estymatr $\sigma(\bar{q})$ (patrz C.2.21)
	niepewność standardowa wyznaczona metodą typu A
$s^2(q_k)$	wariancja eksperymentalna otrzymana na podstawie n niezależnych powtórzonych obserwacji q_k zmiennej q
	estymata wariancji σ^2 rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej q
$s(q_k)$	odchylenie standardowe eksperymentalne równe pierwiastkowi kwadratowemu $s^2(q_k)$
	obciążony estymator odchylenia standardowego σ rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej q
$s^2(\bar{X}_i)$	wariancja eksperymentalna średniej arytmetycznej $\bar{X}_i$ wielkości wejściowej określona na podstawie n powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$ wartości wielkości X_i
	oszacowana wariancja wyznaczona metodą typu A
$s(\bar{X}_i)$	odchylenie standardowe eksperymentalne wielkości wejściowej średniej $\bar{X}_i$, równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu $s^2(\bar{X}_i)$
	niepewność standardowa wyznaczona metodą typu A
$s(\bar{q}, \bar{r})$	estymata kowariancji średnich $\bar{q}$ i $\bar{r}$, estymat wartości oczekiwanych μ_q i μ_r dwóch zmiennych losowych q i r, określonych na podstawie n par powtórzonych równoczesnych obserwacji q_k i r_k zmiennych q i r
	oszacowana kowariancja wyznaczona metodą typu A
$s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	estymata kowariancji średnich $\bar{X}_i$ i $\bar{X}_j$, wielkości wejściowych określone na podstawie n par powtórzonych równoczesnych obserwacji $X_{i,k}$ i $X_{j,k}$ wartości wielkości X_i i X_j
	oszacowana kowariancja wyznaczona metodą typu A
$t_p(v)$	współczynnik t rozkładu t-Studenta o v stopniach swobody, odpowiadający danemu prawdopodobieństwu p
$t_p(v_\mathrm{eff})$	współczynnik t rozkładu t-Studenta o v_eff stopniach swobody opowiadający prawdopodobieństwu p, użyty do obliczenia niepewności rozszerzonej U_p
$u^2(x_i)$	oszacowana wariancja związana z estymatą x_i wielkości wejściowej X_i UWAGA Gdy x_i jest określone jako średnia arytmetyczna n powtórzonych obserwacji, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ jest oszacowaną wariancją wyznaczoną metodą typu A

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$u(x_i)$	niepewność standardowa estymaty x_i wielkości wejściowej X_i, równa dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu $u^2(x_i)$ UWAGA Gdy x_i jest określone jako średnia arytmetyczna n powtórzonych obserwacji, $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ jest odchyleniem standardowym wyznaczonym metodą typu A
$u(x_i, x_j)$	oszacowana kowariancja dwóch estymat x_i i x_j wielkości wejściowych X_i i X_j UWAGA Gdy x_i i x_j są określone z n par powtórzonych równoczesnych obserwacji, $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ jest oszacowaną kowariancją wyznaczoną metodą typu A
$u_c^2(y)$	wariancja złożona związana z estymatą y wielkości wyjściowej
$u_c(y)$	niepewność standardowa złożona estymaty y wielkości wyjściowej, równa dodatniemu pierwiastkowi z $u_c^2(y)$
$u_{cA}(y)$	niepewność standardowa złożona estymaty y wielkości wyjściowej otrzymana z niepewności standardowych i oszacowanych kowariancji wyznaczonych tylko metodą typu A
$u_{cB}(y)$	niepewność standardowa złożona estymaty y wielkości wyjściowej otrzymana z niepewności standardowych i oszacowanych kowariancji wyznaczonych tylko metodą typu B
$u_c(y_i)$	niepewność standardowa złożona estymaty y_i wielkości wyjściowej, gdy dwa lub więcej menzurandów lub wielkości wyjściowych jest określonych w tym samym pomiarze
$u_i^2(y)$	składowa wariancji złożonej $u_c^2(y)$ związana z estymatą wielkości wyjściowej y spowodowana przez oszacowaną wariancję $u^2(x_i)$ związaną z estymatą wielkości wejściowej x_i: $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$
$u_i(y)$	składowa niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$ estymaty wielkości wyjściowej y spowodowana przez niepewność standardową estymaty wielkości wejściowej x_i: $u_i(y) = \lvert c_i \rvert u(x_i)$
$u(y_i, y_j)$	oszacowana kowariancja związana z estymatami y_i i y_j wyznaczanymi w tym samym pomiarze
$u(x_i)/\lvert x_i \rvert$	względna niepewność standardowa estymaty x_i
$u_c(y)/\lvert y \rvert$	względna niepewność standardowa złożona estymaty y
$[u(x_i)/x_i]^2$	oszacowana względna wariancja związana z estymatą x_i
$[u_c(y)/y]^2$	względna wariancja złożona związana z estymatą y
$\dfrac{u(x_i, x_j)}{\lvert x_i x_j \rvert}$	oszacowana względna kowariancja estymat wielkości wejściowych x_i i x_j
U	niepewność rozszerzona estymaty wielkości wyjściowej y wyznaczająca przedział $Y = y \pm U$ o określonym wysokim poziomie ufności, równy iloczynowi współczynnika rozszerzenia k i niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$: $U = k\, u_c(y)$
U_p	niepewność rozszerzona estymaty wielkości wyjściowej y wyznaczająca przedział $Y = y \pm U_p$ o określonym wysokim poziomie ufności p, równy iloczynowi współczynnika rozszerzenia k_p i niepewności standardowej złożonej $u_c(y)$: $U_p = k_p\, u_c(y)$
x_i	estymata wielkości wejściowej X_i UWAGA Jeżeli x_i jest określone jako średnia arytmetyczna n niezależnych powtórzonych obserwacji to $x_i = \overline{X}_i$
X_i	i-ta wielkość wejściowa, od której zależy menzurand Y UWAGA X_i może być wielkością fizyczną lub zmienną losową (patrz 4.1.1 uwaga 1)

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

$\bar{X}_i$	estymata wartości wielkości X_i równa średniej arytmetycznej n niezależnych powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$ wielkości X_i
$X_{i,k}$	k-ta niezależna powtórzona obserwacja X_i
y	estymata menzurandu Y
	wynik pomiaru
	estymata wielkości wyjściowej
y_i	estymata menzurandu Y_i, gdy dwa lub więcej menzurandów jest określanych przez tą samą procedurę pomiarową
Y	menzurand
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	oszacowana względna niepewność niepewności standardowej $u(x_i)$ estymaty x_i wielkości wejściowej
μ_q	wartość oczekiwana lub średnia rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej q
ν	stopnie swobody (ogólnie)
ν_i	stopnie swobody lub wypadkowa liczba stopni swobody niepewności standardowej $u(x_i)$ estymaty wielkości wejściowej x_i
ν_{eff}	wypadkowa liczba stopni swobody $u_{\mathrm{c}}(y)$ używana do wyznaczania $t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$ przy obliczaniu niepewności rozszerzonej U_p
ν_{effA}	wypadkowa liczba stopni swobody niepewności standardowej złożonej określonej z niepewności standardowych wyznaczonych tylko metodą typu A
ν_{effB}	wypadkowa liczba stopni swobody złożonej niepewności standardowej określonej z niepewności standardowych wyznaczonych tylko metodą typu B
σ^2	wariancja rozkładu prawdopodobieństwa wielkości zmiennej losowo (na przykład) q, oszacowana przez $s^2(q_k)$
σ	odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu σ^2
	$s(q_k)$ jest estymatorem obciążonym σ
$\sigma^2(\bar{q})$	wariancja $\bar{q}$ równa σ^2/n, oszacowana przez $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\bar{q})$	odchylenie standardowe $\bar{q}$ równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu $\sigma(\bar{q})$
	$s(\bar{q})$ jest estymatorem obciążonym $\sigma(\bar{q})$
$\sigma^2[s(\bar{q})]$	wariancja odchylenia standardowego eksperymentalnego $s(\bar{q})$ zmiennej $\bar{q}$
$\sigma[s(\bar{q})]$	odchylenie standardowe odchylenia standardowego eksperymentalnego $s(\bar{q})$ zmiennej $\bar{q}$, równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu $\sigma^2(\bar{q})$

*** Przypis do wersji 2008:**

Po pierwszej publikacji Przewodnika przyjęto zasadę redakcyjną, która zakazywała stosowania aneksu I. Dlatego po aneksie H następuje aneks J.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Bibliografia

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb.Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1-C30; BIMP (1980), Raport BIMP - 80/3 *Raport on the BIMP enquiry on error statements*, Międzynarodowe Biuro Miar (Sevres, Francja)

[2] KAARLS, R. (1981), *BIMP Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12; Giacomo. P. (1981), *Metrologia* **17**, 73-74

UWAGA Angielskie tłumaczenie Zalecenia INC-1 (1980) podane we Wstępie do tego Przewodnika (patrz 0.7) jest ostateczną wersją Zalecenia i pochodzi z wewnętrznego raportu BIPM. Jest to zgodne z francuskim tekstem Zalecenia podanym w *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49** i przytoczone w A.1, Aneksu A niniejszego Przewodnika. Angielskie tłumaczenie Zalecenia INC-1 (1980) podane w Metrologia **17** dotyczy wersji roboczej i różni się nieznacznie od tłumaczenia podanego w wewnętrznym raporcie BIPM, a więc w wersji 0.7.

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int Poids et Mesures* **49**, 8-9, 26; Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35; Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50

[5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods - Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (Genewa, Szwajcaria)

UWAGA Ta norma jest obecnie* aktualizowana. Aktualizacja ma nowy tytuł „Dokładność (poprawność i precyzja) metod pomiarowych i wyników pomiarów" i składa się z sześciu części.

[6] *Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii*, drugie wydanie 1993, **Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (Genewa, Szwajcaria)
Akronim tego słownika to VIM.

UWAGA 1 Definicje terminów podanych w aneksie B zostały zaczerpnięte z poprawionego angielskiego tekstu VIM w jego ostatecznej formie przed publikacją.

UWAGA 2 Druga edycja VIM została opublikowana przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) w imieniu następujących siedmiu organizacji, które uczestniczą w pracach Technicznej Grupy Doradczej ISO 4 (TAG 4), grupy, która wspierała rozwój VIM: Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM), Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna (IEC), Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej (IFCC), Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO), Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC), Międzynarodowa Unia Fizyka Teoretycznej i Stosowanej (IUPAP) i Międzynarodowej Organizacji Metrologii Prawnej (OIML).

UWAGA 3 Pierwsza edycja VIM została opublikowana przez ISO w 1984 r w imieniu BIPM, IEC, ISO i OIML.

---

* **Przypis do wersji 2008:**

ISO 5725:1986 została zastąpiona serią sześciu części. ISO 5725 składa się z następujących części, pod ogólnym tytułem *Dokładność (poprawność i precyzja) metod pomiarowych i wyników pomiarów*
Część 1: Ogólne zasady i definicje
Część 2: Podstawowa metoda określania powtarzalności i odtwarzalności standardowej metody pomiarowej
Część 3: Pośrednie miary precyzji standardowej metody pomiarowej
Część 4: Podstawowe metody wyznaczania poprawności standardowej metody pomiarowej
Część 5: Alternatywne metody wyznaczania precyzji standardowej metody pomiarowej
Część 6: Stosowanie w praktyce wartości określających dokładność

** **Przypis do wersji 2008:**

Trzecie wydanie słownika zostało opublikowane w 2008 roku pod tytułem JCGM 200:2008 *Międzynarodowy słownik metrologii – Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nim związane (VIM)*.

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

[7] ISO 3534-1: 1993, * *Statystyka. Terminiologia i symbole. Część 1: Ogólne terminy z zakresu rachunku prawdopodobieństwa i statystyki*. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (Genewa, Szwajcaria)

[8] FULLER, W.A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York. N.Y.)

[9] ALLAN, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas*, **IM-36**, 646-654

[10] DIETRICH, C.F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, second edition, Adam-Hilger (Bristol)

[11] MÜLLER, J. W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163,** 241-251

[12] MÜLLER, J. W. (1984), in *Precision Measurement and Fundamental Constants II*, Taylor, B.N., and Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D. C.), 375-381

[13] JEFFREYS, H. (1983), *Theory of probability*, third edition, Oxford University Press (Oxford)

[14] PRESS, S. J. (1989), *Bayesian statistics; principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.)

[15] BOX, G.E.P., HUNTER, W. G., and HUNTER, J. S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.)

[16] WELCH, B. L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl*. **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ibid*. **34**, 28-35

[17] FAIRFIELD-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australia)* **9**(3), 211

[18] SATTERTHWAITE, F.E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 100–114

[19] ISO Guide 35:1989, ** *Certification of reference materials - General and statistical principles*, drugie wydanie, Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (Genewa, Szwajcaria)

[20] BARKER, T.B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York N.Y.)

* **Przypis do wersji 2008:**

ISO 3534-1:2006 anuluje i zastępuje ISO 3534-1:1993. Należy zauważyć, że niektóre terminy i definicje zostały zmienione. Więcej informacji można znaleźć w najnowszym wydaniu.

** **Przypis do wersji 2008:**

Przewodnik ISO 35:2006 anuluje i zastępuje Przewodnik ISO 35:1989. Więcej informacji można znaleźć w najnowszym wydaniu.

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Skorowidz

A

analiza błędów 0.2
analiza wariancji 4.2.8, H.5

B

bezpieczne granice *patrz* granice bezpieczne
BIPM 7.1.1, A.1, A.2
błąd a niepewność 3.2.2 uwaga 2, 3.2.3 uwaga, E.5.4
błąd największy dopuszczalny F.2.4.2
błąd pomiaru 0.2, 2,2,4, 3.2, 3.2.1 uwaga, 3.2.2 uwaga, 3.2.3 uwaga, 3.3.1 uwaga, 3.3.2, B.2.19, D, D.4, D.6.1, D.6.2, E.5.1
błąd przypadkowy 3.2.1-3.2.3, B.2.21
błąd systematyczny 3.2.1, 3.2.3, B.2.22
błąd względny B.2.20
błąd, analiza *patrz* analiza błędów
błąd, granice maksymalne E.4.1
błąd, krzywa przyrządu sprawdzanego F.2.4.2
błąd, prawo propagacji 5.2.2 uwaga 1, E.3.2

C

całkowita niepewność *patrz* niepewność całkowita
centralne twierdzenie graniczne G.1.6, G.2, G.2.1-G.2.3, G.6.2, G.6.5, G.6.6
charakterystyka C.2.15
CIPM 6.1.1, 6.1.2, A1, A.2, A.3
cząstkowe pochodne 5.1.3
częstość C.2.17
częstość względna E.3.5
częstość, rozkład 3.3.5, 4.1.6, C.2.18, E.3.5
czułości współczynniki 5.1.3, 5.1.4

D

dokładność pomiaru 3.1.3, 3.4.1, B.2.14
dwustronny przedział ufności C.2.27
dystrybuanta C.2.4

E

estymacja C.2.24
estymata 3.2.1, C.2.26
estymata wariancji *patrz* wariancja eksperymentalna
estymata wielkości wejściowej *patrz* wejściowa wielkość, estymata
estymata wielkości wyjściowej *patrz* wyjściowa wielkość, estymata
estymator 4.2.7, C.2.25

F

funkcjonalna zależność 4.1.1, 4.1.2
funkcjonalna zależność, linearyzacja 5.1.5, 5.1.6 uwaga 1, F.2.4.4 uwaga
funkcjonalna zależność, nieliniowa 4.1.4 uwaga, 5.1.2 uwaga, F.2.2.4 uwaga, G.1.5, H.1.7, H.2.4

G

granice bezpieczne 6.3.1 uwaga
granice wartości wielkości wejściowej 4.3.7-4.3.9, 4.4.5, 4.4.6, F.2.3.3
Grupa Robocza d/s Określania Niepewności 0.5, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

H

histogram 4.4.3, D.6.1 uwaga 1

I

IEC A.3, B.1
IFCC B.1
ISO A.3, B.1
ISO 3534-1 2.1, C.1
IUPAC B.1
IUPAP B.1

J

jednostka, użycie danej wartości wzorca miary jako jednostki 3.4.6, 4.2.8 uwaga
jednostronny przedział ufności C.2.28

K

korelacja 5.1, 5.2, G.2.8, F.1.2, F.1.2.1-F.1.2.4
korelacja, eliminacja 5.2.4, 5.2.5, F.1.2.4, h.3.5
korelacji współczynnik 5.2.2, 5.2.3, C.3.6, F.1.2.3, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
korelacji współczynnik, cyfry znaczące 7.2.6
kowariancja 3.3.6, 5.2.2, C.3.4, F.1.2.1-F.1.2.4
kowariancja dwóch średnich arytmetycznych 5.2.3, C.3.4, H.2.2, H.2.4, H.4.2
kowariancja zależnych mezurandów *patrz* skorelowane wielkości wyjściowe i ich estymaty
kowariancja, wyznaczanie eksperymentalne 5.2.5, C.3.6 uwaga 3
krzywa wzorcowania F.2.4.2, F.2.4.5
krzywa wzorcowania, liniowa H.3

L

liczba stopni swobody *patrz* stopnie swobody

Ł

łańcuch wzorcowania 4.2.8 uwaga

M

macierz kowariancji 3.1.7, 5.2.2 uwaga 2, 7.2.5, C.3.5, H.2.3
macierz współczynników korelacji 7.2.5, C.3.6 uwaga 2
maksimum entropii, zasada 4.3.8 uwaga 2
maksymalne granice *patrz* granice wartości wielkości wejściowej
materiały odniesienia, certyfikacja H.5, H.5.3.2
menzurand 1.2, 3.1.1, 3.1.3, B.2.19, D.1, D.1.1, D.1.2, D.3.4
metoda pomiaru 3.1.1, B.2.7
metoda pomiaru, jednostka zależna od metody pomiaru H.6
metoda pomiaru, niepewność *patrz* niepewność metody pomiaru
metoda typu A wyznaczania kowariancji 5.2.3
metoda typu A wyznaczania niepewności 2.3.2, 3.3.3-3.3.5, 4.1.6, 4.2, 4.2.1-4.2.8, 4.3.2, 4.4.1-4.4.3, E.3.7, F.1, F.1.1.1- F.1.2.4
metoda typu B wyznaczania kowariancji 5.2.5
metoda typu B wyznaczania niepewności 2.3.2, 3.3.3-3.3.5, 4.1.6, 4.3, 4.3.1-4.3.11, 4.4.4-4.4.6, E.3.7, F.2
metoda typu B wyznaczania niepewności, potrzeba F.2.1
metrologia prawna 3.4.5
Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej *patrz* OIML
Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej *patrz* IFFC
Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna *patrz* IEC
Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna *patrz* ISO
Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej *patrz* IUPAC

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

Międzynarodowa Unia Fizyki Teoretycznej i Stosowanej	*patrz* IUPAP
Międzynarodowe Biuro Miar	*patrz* BIPM
Międzynarodowy Komitet Miar	*patrz* CIPM
Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii	*patrz* VIM
Międzynarodowy System Jednostek	0.3, 3.4.6
minimum niepewności	*patrz* niepewności minimum
model matematyczny pomiaru	*patrz* pomiar, model matematyczny
moment centralny rzędu *q*	C.2.13, C.2.22E.3.1 uwaga

N

najmniejszych kwadratów metoda	4.2.5, G.3.3, H.3, H.3.1, H.3.2
nieliniowa zależność funkcjonalna	*patrz* funkcjonalna zależność, nieliniowa
niepewność	*patrz* niepewność pomiaru
niepewność całkowita	2.3.5 uwaga 3
niepewność odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej	4.3.2 uwaga, E.4.3
niepewność metody pomiaru	F.2.5, F.2.5.1
niepewność pojedynczej obserwacji wzorcowanego przyrządu	F.2.4.1
niepewność pojedynczej obserwacji sprawdzanego przyrządu	F.2.4.2
niepewność pomiaru	0.1, 0.2, 1.1, 2.2, 2.2.1-2.2.4, 3.3, 3.3.1, 3.3.2, B.2.18, D, D.5, D.5.1-D.5.3, D.6.1, D.6.2
niepewność poprawki	3.2.3 uwaga, 3.3.1, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3
niepewność powodowana histerezą	F.2.2.2
niepewność powodowana niepełną definicją menzurandu	3.1.3 uwaga, D.1.1, D.3.4, D.6.2
niepewność powodowana ograniczeniami próbkowania	4.3.2 uwaga, E.4.3
niepewność powodowana ograniczoną rozdzielczością arytmetyki	F.2.2.3
niepewność powodowana rozdzielczością wskazania cyfrowego	F.2.2.1
niepewność próbki	F.2.6
niepewność przy niestosowaniu korekcji	3.4.4, 6.3.1 uwaga, F.2.4.5
niepewność rozszerzona	3.2.5, 3.3.7, 6, 6.2.1-6.2.3, G,1,1, G.2.3, G.3.2, G.4.1, G.5.1- G.5.4, G.6.4- G.6.6
niepewność rozszerzona dla rozkładu niesymetrycznego	G.5.3
niepewność rozszerzona względna	7.2.3
niepewność rozszerzona, podawanie	7.2.3, 7.2.4
niepewność standardowa	2.3.1, 3.3.5, 3.3.6, 4.1.5, 4.1.6, 4.2.3, D.6.1, E.4.1
niepewność standardowa typu A	3.3.5, 4.2,3, C.3.3
niepewność standardowa typu B	3.3.5, 4.3.1, C.3.3
niepewność standardowa złożona	2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5, 5.1.1-5.1.3, 5.1.6, 5.2.2, 6.1.1, D.6.1, E.3.6
niepewność standardowa złożona i Komitety Konsultacyjne	6.1.1, A.3
niepewność standardowa złożona i porównania międzynarodowe	6.1.1, A.3
niepewność standardowa złożona tylko ze składowych typu A	7.2.1, G.4.1 uwaga 3
niepewność standardowa złożona tylko ze składowych typu B	7.2.1, G.4.1 uwaga 3
niepewność standardowa złożona, obliczanie wartości liczbowej	5.1.3 uwaga 2, 5.2.2 uwaga 3,
niepewność standardowa złożona, podawanie	7.2.1, 7.2.2

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

niepewność standardowa złożona, względna 5.1.6, 7.2.1
niepewność standardowa, metoda wyznaczania typu A *patrz* metoda typu A wyznaczania niepewności
niepewność standardowa, metoda wyznaczania typu B *patrz* metoda typu B wyznaczania niepewności
niepewność wewnętrzna D.3.4
niepewność wielkości kontrolowanej F.2.4.2
niepewność, bezpieczna E.1.1, E.1.2, E.2.1, E.2.3, E.4.1, F.2.3.2
niepewność, brak bezpośredniego podania 7.1.3
niepewność, grupowanie składowych 3.3.3 uwaga, 3.4.3, E.3.7
niepewność, idealna metoda wyznaczania i wyrażania 0.4
niepewność, jakość i użyteczność 3.4.8
niepewność, klasyfikacja składowych 3.3.3, 3.3.4, E.3.6, E.3.7
niepewność, maksymalna dopuszczalna F.2.4.2
niepewność, minimum D.3.4
niepewność, obliczanie statystyczne na podstawie zmienności wielkości wejściowych 3.4.1, 3.4.2, 4.2.8, F.2.1, H.5.3.3
niepewność, odchylenie standardowe jako miara niepewności E.3.2, E.4, E.4.1-E.4.4
niepewność, podawanie 7
niepewność, podwójne liczenie składowych 4.3.10
niepewność, porównanie dwóch interpretacji E.5
niepewność, prawo propagacji 3.3.6, 3.4.1, 5.1.2, E.3, E.3.1, E.3.2, E.3.6, G.6.6
niepewność, przechodniość 0.4
niepewność, skrócony przepis wyznaczania i wyrażania 8
niepewność, wyznaczanie, uzasadnienie realistyczności E.2, E.2.1-E.2.3
niepewność, uniwersalna metoda wyznaczania i wyrażania 0.4
niepewność, wewnętrznie spójna 0.4
niepewność, zaniedbywania składowych 3.4.4
niepewność, zaokrąglanie 7.2.6
niepewność, źródła 3.3.2
nieskorygowany wynik B.2.12
niezależne powtórzenia F.1.1.2
niezależność 5.1, C.3.7

O

obciążenie 3.2.3 uwaga
obserwacje powtarzane 3.1.4-3.1.6, 3.2.2, 3.3.5, 4.2.1, 4.2.3, 4.3.1, 4.4.1, 4.4.3, 5.2.3, E.4.2, E.4.3, F.1, F.1.1, F.1.1.1, F.1.1.2, G.3.2
obserwacje równoczesne, niezależne pary 5.2.3, C.3.4, F.1.2.2, H.2.2, H.2.4, H.4.2
odchylenie standardowe 3.3.5, C.2.12, C.2.21, C.3.3
odchylenie standardowe jako miara niepewności *patrz* niepewność, odchylenie standardowe jako miara niepewności
odchylenie standardowe średniej, eksperymentalne 4.2.3, B.2.17 uwaga 2
odchylenie standardowe średniej, eksperymentalne, niepewność *patrz* niepewność eksperymentalnego odchylenia standardowego średniej
odchylenie standardowe, eksperymentalne 4.2.2, B.2.17
odchylenie standardowe, propagacja E.3, E.3.1, E.3.2
odchylenie standardowe, propagacja wielokrotności E.3.3
odchylenie standardowe, połączone eksperymentalne *patrz* wariancja, estymata połączona
oddziaływania przypadkowe *patrz* przypadkowe oddziaływania
oddziaływania systematyczne *patrz* systematyczne oddziaływania

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

odtwarzalność wyników pomiarów B.2.16
OIML A.3, B.1

P

parametr C.2.7
pomiar 3.1, 3.1.1, B.2.5
pomiar, błąd *patrz* błąd pomiaru
pomiar, dokładność *patrz* dokładność pomiaru
pomiar, dostępność informacji opisujących wynik i niepewność 7.1.1, 7.1.3
pomiar, formaty podawania wyniku i niepewności 7.2.2, 7.2.4
pomiar, hierarchia 7.1.1
pomiar, metoda *patrz* metoda pomiaru
pomiar, model matematyczny 3.1.6, 3.4.1, 3.42, 4.1, 4.1.1, 4.1.2
pomiar, podawanie szczegółowe wyniku i niepewności 7.1.4, 7.2.7
pomiar, procedura 3.1.1, 7.1.2, B.2.8, F.1.1.2
pomiar, rola analizy wariancji H.5.3
pomiar, wynik *patrz* wynik pomiaru
pomiar, zakres stosowalności zasad podanych w *Przewodniku* 1.1
pomiar, zasada *patrz* zasada pomiaru
pomyłka 3.4.7
poprawka 3.2, 3.2.3, 3.2.4 uwaga 2, B.2.23
poprawka, niepewność *patrz* niepewność poprawki
poprawka, nieuwzględnianie 3.2.4 uwaga 2, 3.4.4, 6.2.1 uwaga, F.2.4.5
populacja C.2.16
powtarzalności warunki 3.1.4, B.2.15 uwaga 1
powtarzane obserwacje *patrz* obserwacje powtarzane
powtórzenia niezależne *patrz* niezależne powtórzenia
powtarzalność wyników pomiarów B.2.15
poziom ufności 0.4, 2.2.3 uwaga 1, 2.3.5 uwaga 1 i 2, 3.3.7, 4.3.4, 6.2.2, 6.2.3, 6.3.1-6.3.3, C.2.29, G, G.1.1-G.1.3, G.2.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.6.1, g.6.4, G.6.6
poziom ufności minimalny F.2.3.2
prawdopodobieństwa element C.2.5 uwaga, F.2.4.4
prawdopodobieństwa funkcja C.2.6
prawdopodobieństwa rozkład 3.3.4, 4.1.1 uwaga 1, 4.1.6, 4.2.3 uwaga 1, 4.4.1-4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
prawdopodobieństwa rozkłady, splatanie 4.3.9 uwaga 2, G.1.4- G.1.6, G.2.2, G.6.5
prawdopodobieństwo 3.3.5, 4.3.7-4.3.9, C.2.1, E.3.5, E.3.6, F.2.3.3
prawdopodobieństwo rozszerzenia 0.4, 2.3.5 uwaga 1, 3.3.7, 6.2.2, G.1.1, G.1.3, G.3.2
prawdopodobieństwo subiektywne 3.3.5, D.6.1
prawdopodobieństwo, funkcja gęstości 3.3.5, 4.3.8 uwaga 2, 4.4.2, 4.4.5, 4.4.6, C.2.5, F.2.4.4
precyzja B.2.14 uwaga 2
propagacja błędu, prawo *patrz* błąd, prawo propagacji
propagacja niepewności, prawo *patrz* niepewność, prawo propagacji
próbka, niepewność *patrz* niepewność próbki
próbkowanie, niepewność powodowana ograniczeniami *patrz* niepewność powodowana ograniczeniami próbkowania
przedział ufności 4.2.3 uwaga 1, 6.2.2, C.2.27, C.2.28, E.3.3
przedziały ufności, propagacja E.3.3
przypadkowe oddziaływania 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 4.2.2, E.1.1, E.3
przypadkowość F.1.1, F.1.13- F.1.1.5
przypadkowy 3.3.3, E.1.3, E.3.5-E.3.7
przypadkowy błąd 3.2.1-3.2.3, B.2.11

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

R

rozkład częstości — *patrz* częstość, rozkład
rozkład prawdopodobieństwa — 3.3.4, 4.1.1 uwaga 1, 4.1.6, 4.2.3 uwaga 1, 4.4.1-4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
rozkład prawdopodobieństwa *a priori* — 4.1.6, 4.3.1 uwaga, 4.4.4, D.6.1, E.3.4, E.3.5, G.4.2, G.4.3
rozkład prawdopodobieństwa *F*-Snedecora — H.5.2.3
rozkład prawdopodobieństwa Gaussa — rozkład prawdopodobieństwa normalny
rozkład prawdopodobieństwa niesymetryczny — 4.3.8, F.2.4.4, G.5.3
rozkład prawdopodobieństwa normalny — 4.2.3 uwaga 1, 4.3.2 uwaga, 4.3.4-4.3.6, 4.3.9 uwaga 1, 4.4.2, 4.4.6, C.2.14, E.3.3, F.2.3.3, G.1.3, G.1.4, G.2.1-G.2.3, G.5.2 uwaga 2
rozkład prawdopodobieństwa prostokątny — 4.3.7, 4.3.9, 4.4.5, F.2.2.1-F.2.2.3, F.2.2.3, G.2.2 uwaga 1
rozkład prawdopodobieństwa *t*-Studenta — 4.3.2 uwaga 1, C.3.8, G.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.4.2, G.5.4, G.6.2
rozkład prawdopodobieństwa trapezowy — 4.3.9
rozkład prawdopodobieństwa trójkątny — 4.3.9, 4.4.6, F.2.3.3
rozkłady prawdopodobieństwa matematycznie określone — F.2.2
rozkłady prawdopodobieństwa, splatanie — 4.3.9 uwaga 3, G.1.4-G.1.6, G2.2, G.6.5

S

schemat zrównoważony — H.5.3.1, H.5.3.2
skorelowane wielkości wejściowe i ich estymaty — *patrz* korelacja
skorelowane wielkości wyjściowe i ich estymaty — 3.1.7, 7.2.5, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
skorelowane zmienne losowe — 4.2.7
skorygowany wynik — B.2.13, D.3.1, D.3.4, D.4
splot — *patrz* rozkłady prawdopodobieństwa, splatanie
standardowa niepewność — *patrz* niepewność standardowa
standardowa niepewność, graficzne przedstawienie obliczania — 4.4
standardowa niepewność, metoda typu A — *patrz* niepewność, metoda wyznaczania niepewności typu A
standardowa niepewność, metoda typu B — *patrz* niepewność, metoda wyznaczania niepewności typu B
standardowa niepewność, względna — 5.1.6
statystyczna kontrola — 3.4.2, 4.2.4
statystyczny przedział rozszerzenia — C.2.30
statystyczny przedział tolerancji — C.2.30
statystyka — 4.2.7, C.2.23
stopień zaufania — 3.3.5, E.3.5, E.4.4, E.5.2 uwaga
stopnie swobody — 4.2.6, C.2.31, E.4.3, G, G.3, G.3.2, G.3.3, G.6.3, G.6.4
stopnie swobody niepewności standardowej typu A — G.3.3, G.6.3, G.6.4
stopnie swobody niepewności standardowej typu B — G.4.2, G.4.3, G.6.3, G.6.4
stopnie swobody połączonej estymaty wariancji — H.3.6
stopnie swobody wypadkowe — 6.3.3, G.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2
stopnie swobody wypadkowe składowych tylko typu A — 7.2.1, G.4.1 uwaga 3
stopnie swobody wypadkowe składowych tylko typu B — 7.2.1, G.4.1 uwaga 3
Studenta rozkład — *patrz* rozkład prawdopodobieństwa *t*-Studenta
Studenta rozkład, wartości krytyczne — E.3.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2, G.6.4-G.6.6
systematyczne — 3.3.3, E.1.3, E.3.4-E.3.7
systematyczne oddziaływania — 3.2.3, 3.2.4,3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3, E.4.4
systematyczny błąd — 3.2.1, 3.2.3, B.2.22

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

szczegółowa wielkość 3.1.1, B.2.1 uwaga

Ś

średnia C.2.9, C.3.1
średnia arytmetyczna 4.1.4 uwaga, 4.2.1, C.2.19

T

Taylora szereg 5.1.2, E.3.1, G.1.5, G.4.2, H.1.7, H.2.4
test *F* H.5.2.2, H.5.2.4
tolerancji przedział *patrz* statystyczny przedział tolerancji

U

umownie prawdziwa wartość wielkości B.2.4

V

VIM 2.1, 2.2.3, 2.2.4, B.1

W

wariancja 3.1.7, 4.2.2, 4.2.3, C.2.11, C.2.20. C.3.2
wariancja Allana 4.2.7 uwaga
wariancja eksperymentalna 4.2.2, H.3.6 uwaga
wariancja eksperymentalna sumaryczna *patrz* wariancja, estymata połączona
wariancja eksperymentalna średniej arytmetycznej 4.2.3, C.3.2
wariancja średniej arytmetycznej 4.2.3, C.3.2
wariancja typu A 4.2.3
wariancja typu B 4.3.1
wariancja względna 5.1.6
wariancja względna złożona 5.1.6
wariancja złożona 3.3.6, 5.1.2
wariancja, analiza *patrz* analiza wariancji
wariancja, estymata połączona 4.2.4, 4.2.8 uwaga, H.1.3.2, H.3.6 uwaga, H.5.2.2, H.5.2.5, H.6.3.1, H.6.3.2 uwaga
wartości wielkości wejściowych dane z zewnątrz F.2.3, F.2.3.1
wartość oczekiwana 3.2.2, 3.2.3, 4.1.1 uwaga 3, 4.2.1, 4.3.7-4.3.9, C.2.9, C.3.1, C.3.2
wartość prawdziwa wielkości 2.2.4, 3.3.1 uwaga B.2.3, D, D.3, D.3.1, D.3.4, E.5.1-E.5.4
wartość przeciętna *patrz* średnia arytmetyczna
wartość umownie prawdziwa wielkości *patrz* umownie prawdziwa wartość wielkości
wartość wielkości 3.1.1, B.2.2
wejściowa wielkość 4.1.2
wejściowa wielkość, estymata 4.1.4, 4.1.6, 4.2.6
wejściowa wielkość, granice wartości *patrz* granice wartości wielkości wejściowej
wejściowe wielkości skorelowane *patrz* korelacja
wejściowe wielkości, rodzaje 4.1.3
wejściowe wielkości, wartości dane z zewnątrz *patrz* wartości wielkości wejściowych dane z zewnątrz
Welcha-Satterthwaite'a wzór G.4.1, G.4.2, G.6.2, G.6.4
wielkości wartość *patrz* wartość wielkości
wielkość kontrolowana F.2.4.3
wielkość mierzalna B.2.1
wielkość realizowana D.2, D.2.1, D.3.1-D.3.3, D.4
wielkość szczegółowa *patrz* szczegółowa wielkość
wielkość wejściowa *patrz* wejściowa wielkość
wielkość wpływająca *patrz* wpływająca wielkość
wielkość wyjściowa *patrz* wyjściowa wielkość
wpływająca wielkość 3.1.5, 3.1.6, 3.2.3, 4.2.2, .2.10
wpływające wielkości przypadkowe F.1.1.3, F.1.1.4

 ©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone

współczynnik korekcyjny 3.2.3, B.2.24
współczynnik rozszerzenia 2.3.6, 3.3.7, 4.3.4 uwaga, 6.2.1, 6.3, G.1.3, G.2.3, G.3.4, G.6.1
wyjściowa wielkość, estymata 4.1.4, 4.1.5, 7.2.5
wyjściowe wielkości 4.1.2
wyjściowe wielkości skorelowane *patrz* skorelowane wielkości wyjściowe i ich estymaty
wynik nieskorygowany *patrz* nieskorygowany wynik
wynik pomiaru 1.3, 3.1.2, B.2.11
wynik skorygowany *patrz* skorygowany wynik
wyższego rzędu wyrazy 5.1.2 uwaga, E.3.1, H.1.7
względny błąd B.2.20

Z

Zalecenia 1 (CI-1981), CIPM 0.5, 6.1.1, A.2, A.3
Zalecenia 1 (CI-1986), CIPM 0.5, 6.1.1, 6.1.2, A.3
Zalecenia INC-1 (1980) 0.5, 0.7, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, 6.3.3, A.1, A.3, E, E.2.3, E.3.7
zasada pomiaru B.2.6
zmienna losowa C.2.2
zmienna losowa centrowana C.2.10
zmienne losowe 4.1.1 uwaga 1, 4.2.1, 4.2.3 uwaga 1, C.2.2, C.3.1, C.3.2, C.3.4, C.3.7, C.3.8, E.3.4, F.1.2.1, G.3.2

©JCGM 2008 – wszelkie prawa zastrzeżone