

## Od krzywej błędu do menzurandu

dr Paweł Fotowicz (Redaktor działu Technika i Pomiary)

Metodyka opracowania danych pomiarowych ma już swoją długą historię. Zaczyna się wraz z wykonywaniem pomiarów w sposób naukowy i rozwojem myśli matematycznej. Współcześnie kojarzona jest z pojęciem niepewności pomiaru, jako matematycznego parametru związanego ze zmienną losową. Pierwotnie odnosiła się do zagadnienia zmienności błędu pomiaru w postaci krzywej jego rozkładu. Obecnie odnosi się do pojęcia menzurandu jako matematycznego opisu każdego pomiaru, niezależnie od stopnia jego złożoności. To podejście pozwala na przedstawienie wyniku pomiaru w postaci zbioru możliwych wartości dla wielkości mierzonej, obliczanej na podstawie modelu pomiaru, którego składowymi są zmienne losowe o określonych rozkładach prawdopodobieństwa.

Evaluation of measurement data in metrology is associated with term of measurement uncertainty. The measurement uncertainty is a parameter characterizing the dispersion of the quantity values being attributed to a measurand. The measurand is a quantity intended to be measured and is expressed as an output quantity in a measurement model. This quantity is treated as a set of possible values expressing a measurement result. Mathematically the measurand is a random variable calculated by the propagation of distributions through the measurement model. Usually, the measurement model is the form of measurement equation consists of many components. Any component is also a random variable with a prescribed probability distribution. One component is associated with a series of observations as a random effect, but another components are an systematic effect. Historically, the first of this components was associated with curve of error.

14

### Wstęp

Metodyka opracowania danych pomiarowych w metrologii kojarzy się z pojęciem niepewności pomiaru. Ona zaś rozumiana jest jako parametr charakteryzujący rozproszenie wartości związanych z menzurandem. Termin ten oznacza wielkość, która ma być zmierzona. Wielkość ta przedstawiana jest w postaci matematycznego modelu, który najczęściej przybiera postać równania pomiaru. Równanie to określa zbiór możliwych wartości związanych z wielkością mierzoną, a niepewność pomiaru stanowi miarę jego rozproszenia. We współczesnej metrologii zbiór ten kojarzony jest z wynikiem pomiaru. Matematycznie wyobrażany jest w postaci zmiennej losowej o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa, obliczanym na podstawie przyjętego modelu pomiaru. Równanie pomiaru zawiera szereg składowych, które też są zmiennymi losowymi, lecz w przeciwieństwie do menzurandu, o apriorycznie przyjmowanych rozkładach prawdopodobieństwa. Jedną z takich składowych jest

zawsze składowa losowa związana bezpośrednio z serią obserwacji. Natomiast pozostałe, nazywane oddziaływaniami systematycznymi, wynikają z wiedzy o samym pomiarze. Dotyczy to zarówno pomiaru bezpośredniego, jak i pośredniego.

Jednakże zanim doszło do traktowania wielkości mierzonej jak menzurandu, w odległej przeszłości koncentrowano się tylko na zagadnieniu składowej losowej i jej rozkładzie w postaci krzywej błędu. Krzywa błędu stała się celem poszukiwań dla wielu wybitnych przedstawicieli nauk ścisłych i związana była z teorią wartości prawdziwej w pomiarze.

### Początki

Już w XVII w. Galileusz uważał, że istnieje tylko jedna wartość prawdziwa związana z wielkością mierzoną, a wszystkie obserwacje obciążone są błędami spowodowanymi przez obserwatora, przyrząd pomiarowy i warunki, w których są wykonywane. Sądził on również, że wyniki obserwacji rozłożone są syme-

trycznie wokół wartości prawdziwej, a wartości wyrażające błąd pomiaru rozłożone są symetrycznie wokół zera. Włoski uczony twierdził też, że małe wartości błędów powtarzają się częściej niż duże. Spostrzeżenia te dobrze określają specyfikę wyniku pomiaru i w następnym stuleciu doprowadziły do sformułowania podstawowych rozwiązań w dziedzinie opracowania danych pomiarowych, idących w kierunku określenia tzw. krzywej błędu.

W połowie XVIII stulecia zdawano sobie sprawę, że powtarzając pomiary w ten sam sposób i tym samym przyrządem pomiarowym nie uzyskujemy tych samych wyników – różnią się one od siebie nieznacznie, tworząc pewien przedział zmienności. Dodatkowo częstość powtarzania wyników w tym przedziale jest różna i na ogół większa dla wartości środkowych niż dla skrajnych. Ta obserwacja nasunęła angielskiemu matematykowi Thomasowi Simpsonowi myśl o przyjęciu krzywej dla obwiedni częstości powtarzanych wyników w postaci trójkąta równoramiennego, którego wierzchołek ulokowany jest pośrodku przedziału, a zbocza opadają do zera dla wartości skrajnych. Simpson uważał, że o ile rzeczywista wartość wielkości nie jest znana, to rozkład jej błędu pomiaru już tak, i jest symetryczny z częstością powtarzania proporcjonalną do ciągu liczb 1, 2, ..., n, ..., 2, 1.

Inny wybitny matematyk francuski Pierre Simon Laplace sformułował trzy warunki dotyczące krzywej błędu. Pierwszy, że ma być symetryczna względem wartości prawdziwej, gdyż obserwacje jednako odchylają się od niej w kierunku wartości większych i mniejszych. Drugi, że musi zdążać do zera, oddalając się od wartości prawdziwej, gdyż prawdopodobieństwo, że wartość obserwacji może być nieskończenie różna od wartości prawdziwej, jest równe zeru. Trzeci warunek jest taki, że obszar (pole powierzchni pod krzywą błędu) musi być liczbowo równy jeden, gdyż pewne jest zdarzenie, że każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą. Warunki Laplace'a może spełniać wiele krzywych, lecz dwie spośród nich zasługują na szczególną uwagę.

## Krzywe błędu

Najważniejsze rozwiązania w dziedzinie wyboru krzywej błędu przynosi przełom XVIII i XIX w., a szczególnie pierwsze dziesięciolecie XIX w. Podstawowym zagadnieniem staje się wybór metody opracowania danych pomiarowych. Zagadnienie to sprowadza się

do odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób matematycznie zbudować model pomiaru, dysponując jedynie rozproszonymi danymi eksperymentalnymi. Przykładem może być wyznaczenie parametrów trajektorii ruchu obiektu astronomicznego, np. planetoidy lub komety, na podstawie wykonanych obserwacji położenia tego obiektu. Pomiary astronomiczne absorbowały bowiem uwagę twórców podstawowych rozwiązań w dziedzinie opracowania danych pomiarowych: Laplace'a, Legendre'a i Gaussa. Laplace początkowo uważał, że efektywną może być metoda minimalizacji sumy modułów błędów pomiaru. Już w 1774 r. wnioskuje [1], że krzywą błędu może być podwójna funkcja eksponentialna w postaci:

$$\phi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|} \quad (1)$$

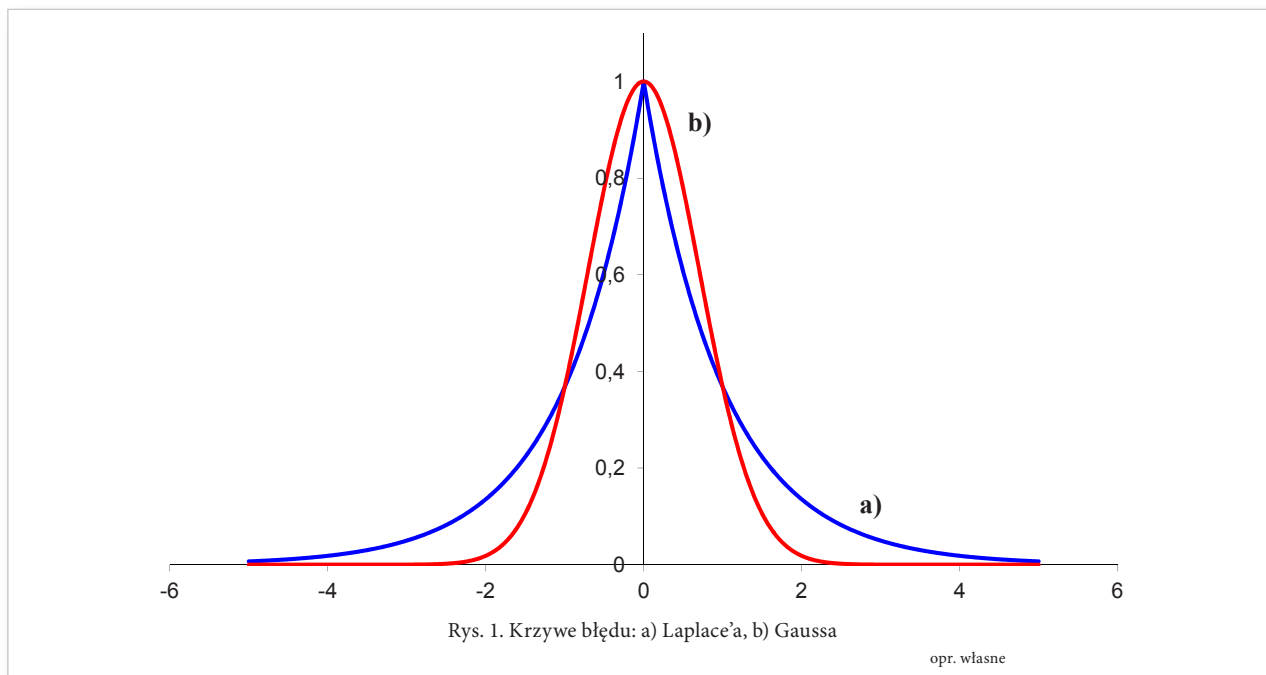
Pod koniec XVIII w., w dobie Rewolucji Francuskiej Laplace i Legendre, dwaj profesorowie matematyki w Ecole Militaire, angażują się w dzieło tworzenia nowego metrycznego systemu miar. Laplace proponuje definicję podstawowej jednostki długości, metra, opartą na długości południka przechodzącego przez Paryż. Legendre wykonuje prace mające na celu możliwie jak najdokładniejsze wyznaczenie szerokości geograficznych punktów kluczowych dla tego południka. Stosuje przy tym nową metodę, opartą o najmniejszą sumę kwadratów błędów i w 1805 r. przedstawia jej opis [2]. Tą samą drogą podąża niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss, który stosuje tę metodę przy obliczaniu trajektorii ciał niebieskich, lecz stawia krok dalej i w 1809 r. postuluje krzywą dzwonową [3] dla błędu pomiaru w postaci:

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (2)$$

Przysłowiową kropkę nad i ostatecznie stawia Laplace, potwierdzając słuszność wyboru Gaussa i w 1810 r. formułując centralne twierdzenie graniczne [4], którego istotą jest zależność całkowa w postaci:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp\left[-\frac{k}{2k'} r^2\right] dr \quad (3)$$

Zależność powyższa określa prawdopodobieństwo błędu średniej obserwacji, w sytuacji gdy błąd każdej z nich określony jest takim samym rozkładem. Można powiedzieć, że Gauss określił funkcję gęstości prawdopodobieństwa błędu, a Laplace jego dystrybuantę.



Warto porównać proponowane funkcje opisujące krzywe błędu. Obie zbudowane są na bazie liczby  $e$ . Pierwsza, będąca rozkładem Laplace'a, ma postać  $\exp(-|x|)$ , a druga będąca rozkładem Gaussa, ma postać  $\exp(-x^2)$ . Obie funkcje, mimo podobieństw w zapisie, różnią się, co do kształtu (rys. 1).

Krzywa błędu wynikająca z przyjęcia, przy opracowaniu danych pomiarowych, kryterium najmniejszej sumy modułów błędów jest, można tak powiedzieć, bardziej rozłożysta w stosunku do krzywej dzwonowej, wynikającej z zastosowania metody najmniejszej sumy kwadratów błędów. Powoduje to powstanie znacznie większego przedziału zmienności dla błędu pomiaru. Krzywa dzwonowa, nazywana rozkładem normalnym, zyskała uznanie w oczach dziewiętnastowiecznych uczonych i stała się standardem przy analizie wyników pomiarów. Można też dodać, że krzywa ta stała się kluczowym odkryciem w obszarze nauk ścisłych XIX w., gdyż przedstawia rozkład wyników powtarzania tych samych działań, niezależnie od źródła ich pochodzenia.

### Niepewność pomiaru

Używanie pojęcia „niepewność” w miejsce pojęcia „błąd” postulował już w 1875 r. George Biddell Airy [5]. Twierdził on, że tak pojmowany błąd może przyjmować wartości łącznie z zerem, a częstość jego powtarzania jest proporcjonalna do funkcji:

$$\frac{1}{c\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{c^2}} \cdot \delta x \quad (4)$$

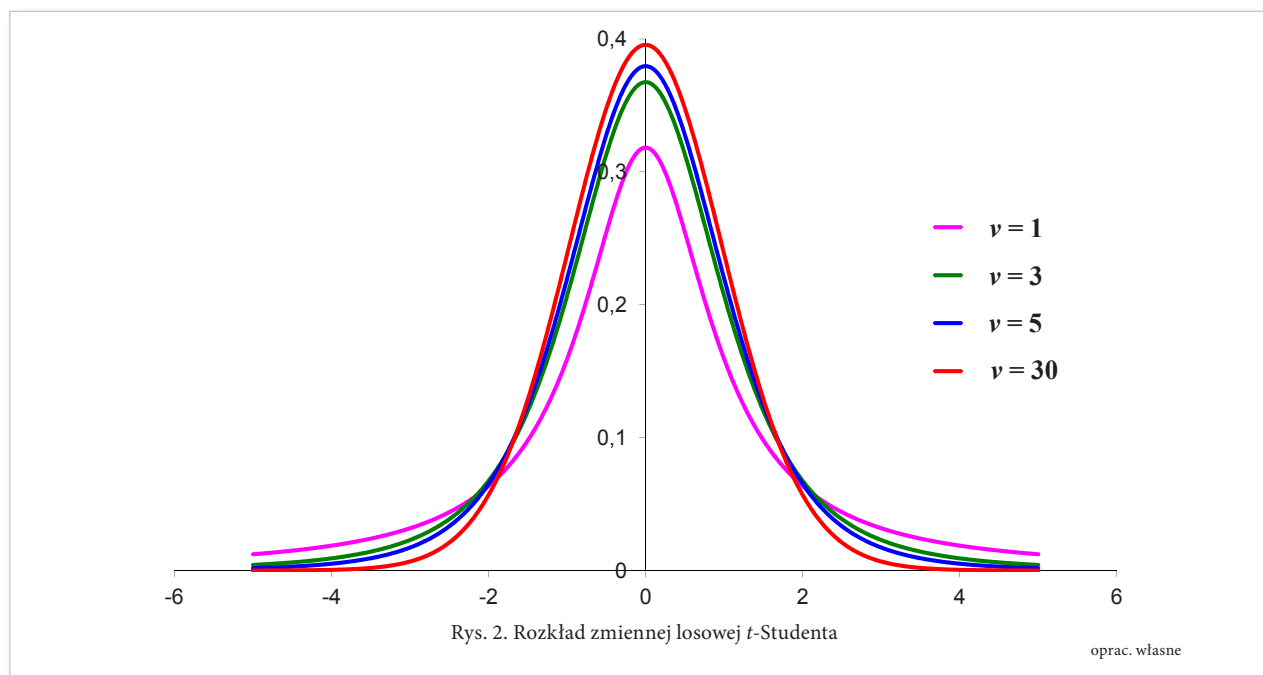
Jak nie trudno się domyśleć wzór powyższy zawiera równanie krzywej dzwonowej. W powyższym wzorze występuje parametr  $c$ , który autor nazywa modułem (modulus) i definiuje go jako:

$$c = \text{Error of Mean Square} \times 1,414214 \quad (5)$$

I tu nie trudno się domyśleć, że moduł Airy'ego jest równy iloczynowi błędu średniego kwadratowego i pierwiastka z dwóch. Dodatkowo, w konkluzji, autor nazywa wzór (4) prawem częstości błędu (Law of Frequency of Error), które wyraża prawdopodobieństwo określonej wartości błędu zawartej w przedziale pomiędzy  $x$  i  $x + \delta x$ . Jednocześnie stwierdza, że moduł jest stały dla określonego pomiaru, lecz inny dla różnych pomiarów. Z dzisiejszego punktu widzenia jest to oczywiste, gdyż dla każdej serii pomiarowej uzyskujemy określoną wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego, ale możliwe są różne jego wartości dla każdej innej serii obserwacji.

Istotnym wnioskowaniem Airy'ego jest również twierdzenie, że w przypadku łączenia błędów pomiaru wielkości  $X$  i  $Y$  ich wspólny moduł, dla wielkości zagregowanej  $Z$ , podlega prawu:

$$\text{square of modulus for } Z = \text{square of modulus for } X + \text{square of modulus for } Y \quad (6)$$



co jest równoznaczne z zapisem współczesnego równania niepewności pomiaru (sumowania wariancji) w postaci:

$$u^2(Z) = u^2(X) + u^2(Y) \quad (7)$$

Dzieło Airy'ego uświadamia, iż mimo przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym dla populacji wyników pomiaru, każda seria obserwacji może mieć inną wartość średniej i odchylenia standardowego eksperymentalnego (błędu średniego kwadratowego).

## Rozkład Studenta

Nad problemem rozkładu dla małej liczby obserwacji w próbie losowej pracował Gosset, który publikował swoje rozważania pod pseudonimem Student. Wyniki swoich dociekań przedstawił w 1908 r. w czasopiśmie „Biometrika” [6]. Zakładał, że wyniki pomiaru wywodzą się z populacji o rozkładzie normalnym, a sam pomiar polega na losowaniu z tej populacji ograniczonej liczebnie serii obserwacji, jako próby losowej. Gosset rozważał serie obserwacji o liczebności od 4 do 10. Stworzył nową zmienną losową będącą ilorazem wartości średniej serii obserwacji i odchylenia standardowego eksperymentalnego tej średniej. O ile sama średnia, zgodnie z wnioskiem Laplace'a, podlega rozkładowi normalnemu, to kwadrat odchylenia standardowego już rozkładowi chi kwadrat. Podzielenie zatem tych dwóch zmien-

nych przez siebie tworzy nowy rozkład. Jest to rozkład wartości średniej standaryzowany jego odchyleniem standardowym eksperymentalnym. Został nazwany rozkładem Studenta. Rozkład ten w swoim charakterze podobny jest do rozkładu normalnego i do niego zbliżony wraz z rosnącą liczbą obserwacji w próbie losowej, lecz o rosnącej rozpiętości (szerokości) wraz z malejącą liczbą obserwacji w próbie (rys. 2).

W publikacji [6] Gosset definiuje zmienną losową  $z = x/s$ , gdzie  $x$  to średnia próby losowej (the mean of the sample), a  $s$  to odchylenie standardowe tej próby (the standard deviation of the sample). Współcześnie do zdefiniowania rozkładu Studenta używa się zmiennej losowej  $t$  o postaci:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s(\bar{x})} \quad (8)$$

W powyższym wzorze zmienna  $\bar{x}$  centrowana jest wartością oczekiwaną  $\mu$  populacji o rozkładzie normalnym (z której losowana jest próba o liczności  $n$ ) i standaryzowana odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej  $s(\bar{x})$ . Rozkład charakteryzuje się liczbą stopni swobody  $\nu = n-1$ .

## Uogólnienie Welch i Satterthwaitea

Ogólniejsze zastosowanie rozkładu Studenta, niż tylko w odniesieniu do pojedynczej zmiennej losowej, zaproponowali w swoich publikacjach Welch [7]

i Satterthwaite [8]. Obaj, niezależnie, rozważali problem rozkładu dla zmiennej losowej będącej sumą wielu zmiennych losowych, z których każda opisana jest jej własnym rozkładem Studenta o określonej liczbie stopni swobody. Wykorzystali fakt, iż wariancja  $V$  wariancji eksperymentalnej  $s^2$  (kwadrat odchylenia standardowego eksperymentalnego) jest proporcjonalna do ilorazu:

$$V(s^2) \propto \frac{\sigma^4}{\nu} \quad (9)$$

gdzie  $\sigma$  jest odchyleniem standardowym populacji o rozkładzie normalnym, a  $\nu$  liczbą stopni swobody. Korzystając z prawa propagacji niepewności w postaci:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (10)$$

można łatwo wykazać, zastępując  $\sigma$  złożoną niepewnością standardową  $u_c(y)$ , że:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \quad (11)$$

Zatem ze zmienną losową, będącą sumą zmiennych losowych, z których każda opisana jest rozkładem Studenta o określonej liczbie stopni swobody  $\nu_i$  można, w przybliżeniu, związać również rozkład Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody  $\nu_{\text{eff}}$  obliczanej na podstawie wzoru (11). Satterthwaite w publikacji [8] stwierdza, że przybliżenie rozkładem Studenta o wypadkowej liczbie stopni swobody generuje kilkuprocentowy błąd obliczeniowy. Przybliżenie powyższe przywołuje Dietrich w swojej pracy, formułującej teorię niepewności pomiaru [9].

### Teoria niepewności Dietricha

Praca Dietricha jest jednym z podstawowych dzieł źródłowych, na które powołują się twórcy Przewodnika [10]. Autor książki [9], w rozdziale poświęconym ogólnej teorii niepewności, przedstawia następujące założenia:

- niepewność wyniku pomiaru wywołana jest sumą oddziaływań (przypadkowego i systematycznych) na wielkość mierzoną, z których każde można opisać przy użyciu rozkładu prawdopodobieństwa,
- sumowanie oddziaływań odbywa się na drodze operacji splotu matematycznego rozkładów przypisanych tym oddziaływaniami,

- oddziaływaniu przypadkowemu przypisuje się rozkład Studenta,
- oddziaływaniu systematycznemu przypisuje się rozkład prostokątny,
- w analizie niepewności uwzględnia się jedno oddziaływanie przypadkowe i  $m \geq 1$  oddziaływań systematycznych.

Problemem pozostaje zagadnienie obliczenia splotu wielu składowych o przyjętych rozkładach prawdopodobieństwa. Autor stwierdza, że czynność jest zbyt czasochłonna i proponuje zastosowanie rozwiązania przybliżonego w postaci wzoru na niepewność:

$$U = \sqrt{t^2 \frac{s^2}{n} + k^2 \sum_{i=1}^M \frac{a_i^2}{3}} \quad (12)$$

gdzie:  $s$  – odchylenie standardowe eksperymentalne,  $t$  – kwantyl rozkładu Studenta o liczbie stopni swobody  $\nu = n-1$ ,  $n$  – liczba obserwacji,  $k$  – kwantyl rozkładu prostokątnego,  $a_i$  – szerokość połówkowa rozkładu prostokątnego związana  $i$ -tym oddziaływaniem systematycznym. Zależność (12), jak stwierdza autor, nie pozwala na dokładne wyznaczenie niepewności obliczanej na podstawie splotu rozkładu Studenta z wieloma rozkładami prostokątnymi. Dietrich zaleca w związku z tym przybliżone rozwiązanie wynikające z zastosowania wzoru Welch-Satterthwaite'a (11). Wzór ten pozwala na obliczanie wypadkowej liczby stopni swobody, co po przekształceniach można przedstawić w następującej postaci:

$$\nu_{\text{eff}} = \left[ 1 + \frac{n}{s^2} \sum_{i=1}^M \frac{a_i^2}{3} \right]^2 (n-1) \quad (13)$$

Na podstawie obliczonej wypadkowej liczby swobody wyznacza się kwantyl  $t_{\text{eff}}$  rozkładu Studenta. Zgodnie z zaleceniami Przewodnika [10], jeżeli wartość wypadkowej liczby stopni swobody nie jest liczbą całkowitą, to jako  $\nu_{\text{eff}}$  należy przyjąć liczbę całkowitą najbliższą wartości obliczonej i od niej mniejszą. Wzór na niepewność rozszerzoną ma wówczas postać:

$$U = t_{\text{eff}} \sqrt{\frac{s^2}{n} + \sum_{i=1}^M \frac{a_i^2}{3}} \quad (14)$$

### Współczesne podejście

Współczesne podejście w dziedzinie wyrażania i obliczania niepewności pomiaru kształtuje pakiet

dokumentów, wydawanych pod egidą Międzynarodowego Biura Miar przez Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM – Joint Committee for Guides in Metrology). W pakiecie tym kluczową rolę odgrywają trzy dokumenty. Naczelnym z nich jest Przewodnik dotyczący wyrażania niepewności pomiaru [10]. Zawiera bazowe rozwiązania niezbędne do obliczania niepewności przy zastosowaniu prawa jej propagacji. Przewodnik definiuje podstawowe pojęcia stosowane w tym obszarze, takie jak niepewność standardowa, złożona niepewność standardowa czy niepewność rozszerzona. Wyodrębnia on dwie metody obliczania niepewności standardowej, typu A i B. Metoda typu A polega na analizie statystycznej serii pojedynczych obserwacji, a w metodzie typu B posługujemy się innymi sposobami niż analiza serii obserwacji. Przewodnik przedstawia sposoby zapisu niepewności pomiaru i zawiera wskazówki praktyczne, co do sposobu obliczania jej składowych.

Drugim z opracowań jest Suplement 1 do Przewodnika [11]. Dokument zawiera wytyczne, co do nowego podejścia w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru. Podstawową jego ideą jest zasada propagacji rozkładów, realizowana poprzez model matematyczny pomiaru przy użyciu metody Monte Carlo. Miarą wyniku pomiaru jest rozkład prawdopodobieństwa, związany z wielkością wyjściową, wyznaczany na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Wynik pomiaru przedstawiany jest w postaci parametrów tego rozkładu: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i kwantyli rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa, jako granic przedziału rozszerzenia. Dokument przedstawia zalecaną procedurę Monte Carlo, umożliwiającą obliczanie wszystkich tych parametrów. Wartość oczekiwana traktowana jest jak najlepsza estymata wielkości wyjściowej, a odchylenie standardowe jako niepewność standardowa związana z tą estymatą. Omówiony został algorytm postępowania z uwzględnieniem liczby próbekowań, umożliwiający osiągnięcie założonej dokładności obliczeniowej przedziału rozszerzenia. Dokument przyjmuje dwie koncepcje przedziału rozszerzenia: symetrycznego probabilistycznie i najkrótszego dla założonego prawdopodobieństwa. Ponadto opisuje on procedurę walidacyjną wyznaczania niepewności pomiaru metodami analitycznymi przy użyciu symulacji Monte Carlo.

Trzecim z opracowań jest Suplement 2 do Przewodnika [12]. Dokument dotyczy wielowymiarowego mo-

delu pomiaru, czyli takiego, w którym występuje dowolna liczba wielkości wyjściowych. Wielkości te są wzajemnie skorelowane, gdyż zależą od tych samych wielkości wejściowych. Dokument przedstawia prawo propagacji niepewności w postaci macierzowej. Uogólnia też zastosowanie metody Monte Carlo w celu numerycznego wyznaczania wspólnego rozkładu prawdopodobieństwa dla wielkości wyjściowej wielowymiarowego modelu pomiaru. Na ich podstawie można wyznaczyć obszar rozszerzenia, będący odpowiednikiem przedziału rozszerzenia dla jednowymiarowego modelu pomiaru, który odpowiada określonemu prawdopodobieństwu. Obszar ten może przybierać postać hiperelipsy lub hiperprostokąta. Dokument przedstawia również procedurę obliczeniową wyznaczania najmniejszego obszaru rozszerzenia.

Powyższe dokumenty określają podstawowy kanon opracowania danych pomiarowych, w myśl kształtującej się współcześnie koncepcji metrologicznej i dlatego noszą wspólny tytuł „Evaluation of measurement data”. Celem ich jest bowiem wyznaczenie wspólnej metodyki opracowania wyniku pomiaru, jednolitej dla całego obszaru zastosowań metrologicznych.

## Wyrażanie niepewności pomiaru

Jak wspomniano we wstępie, niepewność pomiaru to parametr charakteryzujący rozproszenie wartości wielkości związanych z menzurandem. Menzurand to wielkość, która ma być zmierzona i zdefiniowana jest przy użyciu określonego modelu pomiaru. Modelem pomiaru może być dowolna jawna lub niejawna funkcja pomiaru. Na ogół przedstawiana jest w ogólnej postaci jako:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (15)$$

gdzie  $Y$  oznacza wielkość wyjściową, a  $X_1, \dots, X_N$  oznaczają wielkości wejściowe. Są one traktowane jak zmienne losowe opisane określonymi rozkładami prawdopodobieństwa. Parametry tych rozkładów wyznacza się w postaci wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego. Miarą wartości oczekiwanej jest estymata  $x_i$  wielkości, a miarą odchylenia standardowego jej niepewność standardowa  $u(x_i)$ . Na ogół przyjmuje się do opisu tych wielkości następujące rozkłady prawdopodobieństwa: normalny lub Studenta dla niepewności obliczanej metodą typu A i prostokątny, trójkątny lub trapezowy dla niepewności obliczanej metodą typu B.

W klasycznym podejściu GUF (*Guide Uncertainty Framework*), wynikającym z wykładni dokumentu [10], dla wielkości wyjściowej przyjmuje się rozkład normalny lub Studenta z wypadkową liczbą stopni swobody. W tym podejściu kluczowym parametrem jest niepewność rozszerzona obliczana jako:

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (16)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem rozszerzenia, a  $u_c(y)$  to złożona niepewność standardowa, związana z estymatą  $y$  i wielkości wyjściowej  $Y$  reprezentującej mierzand. Przyjmuje się założenie o liniowej lub linearyzowanej funkcji pomiaru, dlatego do obliczania odchylenia standardowego wielkości wyjściowej stosuje się metodę sumowania par kowariancji wielkości wejściowych, jako miary złożonej niepewności standardowej:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (17)$$

co dla wielkości wejściowych nieskorelowanych daje prostszą jej postać:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (18)$$

Obie powyższe zależności w Przewodniku nazywane są prawem propagacji niepewności.

Współczynnik  $k$  przyjmuje wartość zbliżoną do wartości kwantyla rozkładu przyjętego dla wielkości wyjściowej. Gdy rozkładem wielkości wyjściowej jest rozkład Studenta, to kwantyl tego rozkładu wyznacza się dla wypadkowej liczby stopni swobody, obliczanej ze wzoru Welch-Satterthwaitea:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (19)$$

Przy prawdopodobieństwie  $p = 95\%$  dla rozkładu normalnego w przybliżeniu  $k = 2$ , a dla rozkładu Studenta na ogół  $k \geq 2$ .

W podejściu reprezentowanym przez suplementy do Przewodnika rozkład prawdopodobieństwa związany z wielkością wyjściową  $Y$  wyznaczany jest poprzez model lub funkcję pomiaru. Działanie to nazywane jest propagacją rozkładów. Polega ona na wyznaczeniu dystrybuanty  $G$  dla wielkości wyjściowej i może być realizowana:

- metodami analitycznymi poprzez matematyczne przedstawienie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla  $Y$ ,
- metodą propagacji niepewności opartą na przybliżeniu funkcji pomiaru pierwszymi wyrazami szeregu Taylora,
- przez włączenie dodatkowych członów wyższych rzędów wyrazów szeregu Taylora,
- metodami numerycznymi, szczególnie z zastosowaniem metody Monte Carlo.

Metoda Monte Carlo prowadzi do uzyskania numerycznej aproksymacji dystrybuanty  $G$  dla wielkości wyjściowej. Procedura realizowana jest w kolejnych krokach postępowania:

- wybór liczby próbkowania  $M$ ,
- wygenerowanie  $M$  prób  $N$  elementowego zbioru wielkości wejściowych,
- dla każdej próby obliczenie, na podstawie funkcji pomiaru, odpowiadającej jej wartości  $y$ , wielkości wyjściowej,
- posortowanie wartości wielkości wejściowych w niemalejącym porządku, używając posortowanych wartości  $y_r$  do przybliżenia dystrybuanty wielkości wyjściowej  $G$ ,
- wyznaczenie z dystrybuanty  $G$  estymaty wielkości wyjściowej i związanej z nią niepewności standardowej,
- wyznaczenie z dystrybuanty  $G$  odpowiedniego przedziału rozszerzenia dla określonego prawdopodobieństwa  $p$ .

Ogólnie, przy opracowaniu danych pomiarowych postępowanie składa się z trzech etapów: opisu wielkości, obliczeń i zapisu wyniku. Zgodnie z zaleceniami opis wielkości powinien zawierać:

- definicję wielkości wyjściowej jako mierzandu,
  - określenie wielkości wejściowych  $X_i$ , od których zależy wielkość wyjściowa  $Y$ ,
  - model matematyczny określający relacje pomiędzy wielkościami wejściowymi a wielkością wyjściową,
  - przyjęcie rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych.
- Etap obliczeń polega na realizacji zasady propagacji rozkładów wielkości wejściowych poprzez model pomiaru w celu otrzymania rozkładu dla wielkości wyjściowej, a zapis wyniku polega na przedstawieniu:
- wartości oczekiwanej jako estymaty  $y$  i wielkości wyjściowej,

- b) odchylenia standardowego jako niepewności standardowej  $u(y)$ , związanej z estymatą  $y$ ,
- c) przedziału rozszerzenia dla wielkości wyjściowej przy określonym prawdopodobieństwie, w postaci jego dolnej i górnej granicy  $y_{\text{low}}$  i  $y_{\text{high}}$ .

Ponieważ wyniki obliczeń metodą propagacji rozkładów mogą się różnić od wyników obliczeń przy zastosowaniu prawa propagacji niepewności, to zaleca się ich walidację. Polega ona na:

- a) zastosowaniu prawa propagacji niepewności w celu wyznaczenia przedziału rozszerzenia o wartościach granicznych:  $y \pm U$  dla wielkości wyjściowej  $Y$ ,
- b) zastosowaniu zalecanej procedury obliczeniowej dla metody Monte Carlo w celu otrzymania wartości niepewności standardowej  $u(y)$  oraz granic  $y_{\text{low}}$  i  $y_{\text{high}}$  przedziału rozszerzenia dla wielkości wyjściowej  $Y$ .

Następnie należy sprawdzić, czy otrzymane przedziały rozszerzenia zgadzają się co do ustalonej tolerancji numerycznej  $\delta = 10^\alpha/2$ , gdy  $u(y) = A \cdot 10^\alpha$ . W tym celu oblicza się:

$$d_{\text{low}} = |y - U - y_{\text{low}}| \quad (20)$$

$$d_{\text{high}} = |y + U - y_{\text{high}}| \quad (21)$$

jako bezwzględne wartości odpowiadające granicom przedziału. Jeżeli wartości te są nie większe niż  $\delta$ , to można uznać obliczenia wykonane na podstawie prawa propagacji niepewności za zwalidowane.

W przypadku wielowymiarowych modeli pomiaru, dla których wielkość wyjściowa jest wektorem, można zastosować metodę propagacji niepewności, która jest uogólnieniem prawa propagacji niepewności stosowanego w dziedzinie jednowymiarowych modeli pomiaru lub metodę propagacji rozkładów. Pierwsza metoda opiera się na rachunku macierzowym, a druga na obliczeniach numerycznych z wykorzystaniem procedury Monte Carlo. Obie prowadzą do wyznaczenia obszaru rozszerzenia, jako miary niepewności pomiaru dla wielkości wielowymiarowych. Szczegóły postępowania omówiono w publikacji [13].

## Podsumowanie

Przedstawione podejście w dziedzinie opracowania danych pomiarowych stosowane we współczesnej metrologii czerpie bogato z tradycji myśli mate-

matycznej, która kształtowała się na przestrzeni ostatnich stuleci. Jego prekursorami byli najwybitniejsi twórcy w dziedzinie nauk ścisłych. Podejście to wyrasta z klasycznej teorii błędu pomiaru, opierając się o rachunek zmiennych losowych, współcześnie realizowany już przy użyciu numerycznych metod obliczeniowych wspieranych przez powszechnie dostępne techniki komputerowe. Przeszło drogę ewolucyjną od wyobrażenia krzywej błędu, jako pierwotnej postaci zmiennej losowej, do dojrzałej, w postaci menzurandu formowanego poprzez model pomiaru. Jest uniwersalną propozycją w dziedzinie opracowania danych, mogących mieć zastosowanie we wszystkich obszarach nauk technicznych. Stanowi istotny wkład metrologii do rozwoju tych nauk.

## Literatura

- [1] Laplace P. S., *Mémoire sur la probabilité des causes par les événemens*, Paris 1774.
- [2] Legendre A. M., *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1805.
- [3] Gauss C. F., *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solum ambientium*, Hamburg 1809.
- [4] Laplace P. S., *Memoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de tres grands nombres et sur leur application aux probabilites*, Paris 1810.
- [5] Airy G. B., *On the algebraic and numerical theory of errors of observations and the combination of observations*, London 1875.
- [6] Student, *The probable error of a mean* [w:] "Biometrika", vol. 6 (1908).
- [7] Welch B. L., *The generalization of Student's problem when several different population variances are involved* [w:] "Biometrika", vol. 34 (1947).
- [8] Satterthwaite F. E., *An approximate distribution of estimates of variance components* [w:] "Biometrics Bulletin", vol. 2 (1946).
- [9] Dietrich C. F., *Uncertainty, calibration and probability. The statistics of scientific and industrial measurement. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology*, Second edition 1991.
- [10] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO 1993, 1995 (corrected and reprinted). JCGM 100:2008.*
- [11] *Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008.*
- [12] *Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Extension to any number of output quantities. JCGM 102:2011.*
- [13] Fotowicz P., *Omówienie międzynarodowego dokumentu JCGM 102:2011 dotyczącego wyrażania niepewności pomiaru* [w:] Biuletyn GUM, nr 3 (2014).