ROZDZIAŁ 7

METODY PRZYBLIŻONE OBLICZANIA NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

Michał Lisowski
Politechnika Wrocławska, Wydział Elektryczny
Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii

1. Wprowadzenie

Metoda obliczania niepewności pomiarów pośrednich zgodnie z przewodnikiem GEUM (*Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*) [1] jest bardzo pracochłonna. W pomiarach technicznych, wykonywanych na niezbyt wysokim poziomie dokładności, wystarczające mogą być metody przybliżone szacowania niepewności pomiarów pośrednich, znacznie mniej pracochłonne [2 ÷ 5].

W metodach przybliżonych oddzielnie określa się współczynnik rozszerzenia dla niepewności typu A i współczynnik rozszerzenia dla niepewności typu B [2]. Niepewność rozszerzoną typu A dla każdej zmierzonej bezpośrednio wartości średniej wielkości wejściowej $\overline{x}_j$ oblicza się z zależności:

$$U_A\left(\overline{x}_j\right) = k_{Aj} u_A\left(\overline{x}_j\right), \tag{1}$$

w której $k_{Aj} = t_{p,v}$ jest współczynnikiem rozszerzenia, równym kwantylowi $t_{p,v}$ rozkładu t-Studenta, zależnym od poziomu ufności p i liczby stopni swobody $v = n - 1$ (n – liczba powtarzanych odczytów wyniku pomiarów); $u(\overline{x}_j) = s_A(\overline{x}_j)$ jest niepewnością standardową typu A wartości średniej wielkości wejściowej $\overline{x}_j$, równą odchyleniu standardowemu tej wartości średniej.

Niepewność rozszerzona typu B wyraża się podobną zależnością:

$$U_B\left(\overline{x}_j\right) = k_{Bj} u_B\left(\overline{x}_j\right), \tag{2}$$

w której: k_B jest współczynnikiem rozszerzenia dla niepewności typu B, $u_B(\overline{x}_j)$ jest niepewnością standardową typu B wartości średniej wielkości wejściowej $\overline{x}_j$.

Jeżeli liczba powtarzanych odczytów wyników pomiarów n jest dostatecznie duża, to można przyjąć, że rozkład otrzymanych wartości jest normalny. Wówczas dla poziomu ufności $p = 0{,}95$ współczynnik rozszerzenia $k_{Aj} = 2$. Niepewności typu B wynikają głównie z niedokładności przyrządów pomiarowych, określonych błędami granicznymi, dla których przyjmuje się rozkłady prostokątne (równomierne). Dla rozkładu prostokątnego współczynnik rozszerzenia $k_{Bj} = p \cdot \sqrt{3}$ i dla $p = 0{,}95$ współczynnik ten przyjmuje wartość $k_{Bj} = 0{,}95 \cdot \sqrt{3} = 1{,}65$.

W metodach przybliżonych wzór na niepewność standardową złożoną wartości średniej wielkości wejściowej $\overline{x}_j$ [1], po uwzględnieniu zależności (1) i (2) przekształci się do postaci:

$$u\left(\overline{x}_j\right) = \sqrt{u_A^2\left(\overline{x}_j\right) + u_B^2\left(\overline{x}_j\right)} = \sqrt{\frac{U_A^2\left(\overline{x}_j\right)}{k_{Aj}^2} + \frac{U_B^2\left(\overline{x}_j\right)}{k_{Bj}^2}}\,. \tag{3}$$

W pomiarach pośrednich wartość wielkości mierzonej y określa się z funkcją $y = f(x_j)$. Jeżeli wartości wielkości wejściowych x_j nie są skorelowane, to niepewność rozszerzoną oblicza się ze wzoru [1]:

$$U(y) = k_p u(y) = k_p \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_j^2(\overline{x}_j)}\,, \tag{4}$$

w którym k_p jest współczynnikiem rozszerzenia, a $c_j = \partial y / \partial x_j$ są współczynnikami wrażliwości.

Po uwzględnieniu zależności (3) wyrażenie (4) przyjmuje postać:

$$U(y) = k_p \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \left(\frac{U_A^2(\overline{x}_j)}{k_{Aj}^2} + \frac{U_B^2(\overline{x}_j)}{k_{Bj}^2} \right)}\,. \tag{5}$$

W metodach przybliżonych, zgodnie z podstawowym twierdzeniem statystyki matematycznej CTG[1], dla funkcji o wielu zmiennych niezależnych o różnych rozkładach, przyjmuje się wypadkowy rozkład jako zbliżony do normalnego[2]. Dla takiego rozkładu dla poziomu ufności $p = 0{,}95$ współczynnik rozszerzenia $k_p = 2$.

Rozważmy trzy przypadki uproszczonego szacowania niepewności rozszerzonej:

1) niepewności typu A i typu B mają porównywalne wartości,
2) nie występują rozrzuty wyników pomiarów i niepewności typu A są pomijalnie małe, a decydujące znaczenia mają niepewności typu B,
3) niepewności typu B są pomijalnie małe i występują duże rozrzuty wyników pomiarów, a pomiary są wielokrotnie powtarzane dla zminimalizowania niepewności typu A.

2. Niepewności typu A i typu B mają porównywalne wartości

Gdy niepewności typu A i typu B mają porównywalne wartości, niepewność rozszerzoną można obliczyć jedną z trzech metod przybliżonych [2]:

1) sumy arytmetycznej,
2) sumy geometrycznej,
3) dominującego składnika.

2.1. Metoda sumy arytmetycznej

W metodzie sumy arytmetycznej niepewność rozszerzona złożona $U(\overline{x}_j)$ jest sumą arytmetyczną niepewności rozszerzonych typu A i typu B, czyli:

$$U(\overline{x}_j) = U_A(\overline{x}_j) + U_B(\overline{x}_j)\,, \tag{6}$$

[1] Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG): wypadkowa wielu niezależnych równorzędnych zmiennych losowych, niezależnie od rozkładów tych zmiennych, ma rozkład zbliżony do normalnego [1].

[2] Poprawnie powinno się przyjąć rozkład t-Studenta, który zbliżony jest do rozkładu normalnego.

gdzie niepewności rozszerzone $U_A(\overline{x}_j)$ i $U_B(\overline{x}_j)$ są wyrażone wzorami (1) i (2). Niepewności typu B wynikają najczęściej z błędów systematycznych granicznych przyrządów pomiarowych $\Delta_g x_j$, dla których przyjmuje się rozkłady prostokątne. Dla takich rozkładów niepewność rozszerzona typu B:

$$U_B\left(\overline{x}_j\right) = p\,\Delta_g \overline{x}_j \tag{7}$$

i wzór (6) przyjmuje postać:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = U_A\left(\overline{x}_j\right) + p\,\Delta_g \overline{x}\,. \tag{8}$$

Arytmetyczne sumowanie się składowych niepewności typu A i B jest mało prawdopodobne i wyniki obliczeń niepewności rozszerzonej, uzyskiwane tą metodą są znacznie zawyżone w porównaniu z metodą zalecaną przez przewodnik GEUM [1].

2.2. Metoda sumy geometrycznej

Bardziej wiarygodną jest metoda sumy geometrycznej. W metodzie sumy geometrycznej niepewność rozszerzona złożona składa się z niepewności rozszerzonych typu A i typu B, którą oblicza się z zależności:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = \sqrt{U_A^2\left(\overline{x}_j\right) + U_B^2\left(\overline{x}_j\right)}\,, \tag{9}$$

gdzie $U_A(\overline{x}_j)$ i $U_B(\overline{x}_j)$ są wyrażone wzorami (1) i (2).

Jeżeli niepewności typu B mają rozkład prostokątny, to wzór (9) przyjmie postać:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = \sqrt{U_A^2\left(\overline{x}_j\right) + \left(p\Delta_g \overline{x}_j\right)^2}\,. \tag{10}$$

Dla poziomu ufności $p = 0{,}95$ można przyjąć uproszczenie, że $p\,\Delta_g \overline{x}_j = 0{,}95\,\Delta_g \overline{x}_j \cong \Delta_g \overline{x}_j$ i wzór (10) uprości się do postaci:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = \sqrt{U_A^2\left(\overline{x}_j\right) + \left(\Delta_g \overline{x}_j\right)^2}\,. \tag{11}$$

Wyniki obliczeń niepewności rozszerzonej uzyskiwane metodą sumy geometrycznej są zbliżone do wyników uzyskiwanych metodą zalecaną przez przewodnik GEUM. Dlatego dalsze rozważania dotyczą wyłącznie tej metody.

2.2.1. Metoda dominującego składnika

Metoda dominującego składnika jest odmianą metody sumy geometrycznej, w której niepewność rozszerzoną oblicza się ze wzoru (9) lub (10). Wstawiając do wyrażenia (9) zależności (1) i (2) otrzymuje się wzór:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = \sqrt{k_{Aj}^2 u_A^2\left(\overline{x}_j\right) + k_{Bj}^2 u_B^2\left(\overline{x}_j\right)}\,. \tag{12}$$

Rozważmy dwa przypadki: gdy niepewności typu A są większe od niepewności typu B oraz gdy niepewności typu A są mniejsze od niepewności typu B.

2.2.1.1. Niepewności typu A są większe od niepewności typu B

Jeżeli $u_A(y) > u_B(y)$, to we wzorze (12) przyjmuje się obydwa współczynniki rozszerzenia jako k_{Aj} i uwzględniając, że źródłem niepewności typu B jest błąd graniczny o rozkładzie prostokątnym, wzór (12) przekształca się do postaci:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = k_{Aj}\sqrt{u_A^2\left(\overline{x}_j\right)+u_B^2\left(\overline{x}_j\right)} = k_{Aj}\sqrt{u_A^2\left(\overline{x}_j\right)+\frac{\left(\Delta_g\overline{x}_j\right)^2}{3}} \,. \tag{13}$$

W pomiarach pośrednich wynik pomiaru $y = f(x_j)$, a jego niepewność rozszerzoną, zgodnie ze wzorem (5), wyraża zależność:

$$U\left(y\right) = \frac{k_p}{k_{Aj}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2\left[U_A^2\left(\overline{x}_j\right)+U_B^2\left(\overline{x}_j\right)\right]} = \frac{k_p}{k_{Aj}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 U^2\left(\overline{x}_j\right)}\,, \tag{14}$$

w której niepewność złożona rozszerzona $U(\overline{x}_j)$ określona jest zależnością (9).

Obliczanie niepewności wykonuje się najczęściej na poziomie ufności $p = 0{,}95$, dla którego – zgodnie z twierdzeniem CTG – dla wielu zmiennych x_j niezależnych współczynnik rozszerzenia we wzorze (14) $k_p = 2$. Jeżeli liczba powtarzanych odczytów wyników pomiarów jest dostatecznie duża, to również współczynnik rozszerzenia $k_{Aj} = 2$. Dla rozkładu prostokątnego $U_j\left(\overline{x}_j\right) = 0{,}95\,\Delta_g\overline{x}_j \cong \Delta_g\overline{x}_j$ i wzór (14) przyjmuje praktyczną postać:

$$U\left(y\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2\left[U_A^2\left(\overline{x}_j\right)+\left(\Delta_g\overline{x}_j\right)^2\right]} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 U^2\left(\overline{x}_j\right)}\,, \tag{15}$$

gdzie niepewność $U(\overline{x}_j)$ określona jest wzorem (11).

2.2.1.2. Niepewności typu A są mniejsze od niepewności typu B

Gdy $u_A(y) < u_B(y)$, to we wzorze (12) przyjmuje się obydwa współczynniki rozszerzenia jako k_{Bj}. Jeżeli źródłem niepewności typu B jest błąd graniczny o rozkładzie prostokątnym, to współczynnik $k_{Bj} = p\sqrt{3}$ i wzór (12) przekształca się do postaci:

$$U\left(\overline{x}_j\right) = k_{Bj}\sqrt{u_A^2\left(\overline{x}_j\right)+u_B^2\left(\overline{x}_j\right)} = p\sqrt{3}\sqrt{u_A^2\left(\overline{x}_j\right)+\frac{\left(\Delta_g\overline{x}_j\right)^2}{3}} \,. \tag{16}$$

Ponieważ wielkość mierzona $y = f(x_j)$, to zgodnie ze wzorem (5) niepewność rozszerzona

$$U\left(y\right) = \frac{k_p}{k_{Bj}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2\left[U_A^2\left(\overline{x}_j\right)+U_B^2\left(\overline{x}_j\right)\right]} = \frac{k_p}{k_{Bj}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 U^2\left(\overline{x}_j\right)}\,, \tag{17}$$

gdzie niepewność $U(\overline{x}_j)$ określona jest zależnością (9).

Obliczanie niepewności wykonuje się najczęściej na poziomie ufności $p = 0{,}95$, dla którego współczynnik rozszerzenia we wzorze (17) $k_p = 2$. Jeżeli niepewności typu B mają rozkład prostokątny, to $k_{Bj} = p\sqrt{3}$. Przyjmując upraszczające założenia, że

$0{,}95\sqrt{3} \cong \sqrt{3}$ i $U_j\left(\overline{x}_j\right) = 0{,}95\Delta_g \overline{x}_j \cong \Delta_g \overline{x}_j$ wzór (17) przekształca się do praktycznej użytecznej postaci:

$$U\left(y\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \left[U_A^2\left(\overline{x}_j\right) + \left(\Delta_g \overline{x}\right)^2\right]} = 1{,}15\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 U^2\left(\overline{x}_j\right)}\ . \tag{18}$$

Przyjęte w wyprowadzeniu wzoru (18) uproszczenia nie mają istotnego znaczenia dla obliczeń wartości niepewności, a otrzymany wzór (18) jest w praktyce bardzo przydatnym wzorem, z którego łatwo można obliczać niepewność rozszerzoną wyników pomiarów pośrednich, w których przeważającymi są niepewności typu B.

Należy zwrócić uwagę, że wzór (15) (dla przypadku, gdy niepewności typu A są większe od niepewności typu B) różni się od wzoru (18) (dla przypadku, gdy niepewności typu B są większe od niepewności typu A) tylko współczynnikiem przed pierwiastkiem. We wzorze (15) wynosi on 1, a we wzorze (18) – 1,15. Jeżeli niepewności typu A mają porównywalne wartości z niepewnościami typu B, to można mieć wątpliwość: który zastosować wzór (15), czy (18)? W takich przypadkach należy pamiętać, że bezpieczniej jest zawyżyć wartość niepewności niż ją zaniżyć. Stąd wynika wniosek, że wówczas niepewność powinno się obliczać ze wzoru (18).

3. Niepewności typu A są pomijalnie małe, a decydujące znaczenia mają niepewności typu B

W pomiarach przemysłowych często wyniki powtarzanych pomiarów praktycznie nie różnią się między sobą i wówczas można zaniechać wielokrotnego powtarzania pomiarów. Brak istotnych różnic wyników pomiarów świadczy o pomijalnie małej niepewności typu A. Wówczas do obliczeń niepewności rozszerzonej można przyjąć tylko niepewności typu B.

Błędy systematyczne wskazań przyrządów pomiarowych przeważnie nie są eliminowane przez wprowadzanie poprawek i są znane jedynie w postaci błędów granicznych $\Delta_g x_j$. Błędy te są głównym składnikiem niepewności typu B i można przyjąć, że mają prostokątny rozkład prawdopodobieństwa. W takim przypadku poszczególne niepewności standardowe typu B $u_B\left(x_j\right) = \Delta_g x_j \big/ \sqrt{3}$ i wyrażenie (4) na niepewność rozszerzoną wyniku pomiaru pośredniego przyjmuje postać:

$$U\left(y\right) = U_B\left(y\right) = k_p\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_B^2\left(x_j\right)} = k_p\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2\left(\frac{\Delta_g x_j}{\sqrt{3}}\right)^2}\ . \tag{19}$$

Jeżeli poszczególne wartości wielkości wejściowych x_i mają rozkłady prostokątne, to wypadkowy rozkład dla wartości wyjściowej y, będący splotem rozkładów prostokątnych, nie jest rozkładem prostokątnym. Dla dwóch wartości wielkości x_1 i x_2 o rozkładach prostokątnych wypadkowy rozkład wartości $y = x_1+x_2$ jest rozkładem trapezowym. Dla funkcji o większej liczbie zmiennych niezależnych o rozkładach prostokątnych, na mocy centralnego twierdzenia granicznego (CTG), można przyjąć, że wypadkowy rozkład jest normalny. Dla takiego rozkładu dla poziomu ufności

p = 0,95 współczynnik rozszerzenia k_p = 2. Podstawiając tę wartość do wzoru (19) otrzymuje się praktyczny wzór:

$$U(y) = U_B(y) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \cdot \left(\Delta_g x_j\right)^2} = 1{,}15\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \cdot \left(\Delta_g x_j\right)^2}\,, \tag{20}$$

z którego łatwo można obliczyć niepewność rozszerzoną wyniku pomiaru pośredniego.

W wyprowadzeniu wzoru (20) nie stosowano żadnych uproszczeń. Wzór (20) można również łatwo uzyskać z wyrażenia (18), wstawiając w nim $U_A(\overline{x}_j) = 0$.

Jeżeli rozrzuty wyników pomiarów są pomijalne, a wartości wielkości wejściowych x_j nie są skorelowane, to wyniki obliczeń niepewności rozszerzonej na poziomie ufności 0,95, metodą zalecaną w przewodniku GEUM [1] i opisaną tu metodą przybliżoną, są identyczne.

Rozważmy szczególny, często spotykany przypadek, kiedy wielkość mierzona y jest iloczynem lub ilorazem wielkości wejściowych x_j, czyli wartość wielkości wyjściowej obliczana jest z zależności:

$$y = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_j^{\gamma} \ldots x_m^{\varphi}\,. \tag{21}$$

W tym przypadku, dla ułatwień obliczeń, można najpierw obliczyć niepewność rozszerzoną względną na poziomie ufności 0,95 ze wzoru:

$$W(y) = \frac{U(y)}{y} = 1{,}15\sqrt{\alpha^2\left(\delta_g x_1\right)^2 + \beta^2\left(\delta_g x_2\right)^2 + \ldots + \gamma^2\left(\delta_g x_j\right)^2 \ldots + \varphi^2\left(\delta_g x_m\right)^2}\,, \tag{22}$$

w którym $\delta_g x_1$, $\delta_g x_2$, $\delta_g x_i$, $\delta_g x_m$ są względnymi błędami granicznymi poszczególnych wielkości wejściowych.

Następnie znając niepewność rozszerzoną względną można obliczyć niepewność rozszerzoną bezwzględną z zależności:

$$U(y) = y \cdot W(y), \tag{23}$$

a jeżeli niepewność względna wyrażona jest w %, to

$$U(y) = \frac{y \cdot W(y)}{100}\,. \tag{24}$$

4. Niepewności typu B są pomijalnie małe, a decydujące znaczenia mają niepewności typu A

W czułych pomiarach laboratoryjnych, na przykład wartości śladowych substancji lub właściwości fizyko-chemicznych obiektu o dużej niestabilności jego właściwości, albo w pomiarach ze znacznym udziałem sygnałów zakłócających, uzyskuje się bardzo duży rozrzut wyników. W takich przypadkach pomiary należy powtarzać wielokrotnie na tym samym badanym obiekcie, a za wynik przyjąć wartość średnią. Jeżeli obliczone niepewności typu A z rozrzutu wyników pomiarów mają wartości znacznie większe od niepewności typu B, to można przyjąć, że całkowitą niepewnością pomiaru jest niepewność typu A. Przyjmując we wzorze (15) $\Delta_g \overline{x}_j = 0$, otrzymuje się wzór:

$$U(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 U_A^2 \left(\overline{x}_j\right)} \; . \tag{25}$$

Dla obliczenia niepewności rozszerzonej ze wzoru (25) należy najpierw obliczyć niepewność rozszerzoną typu A dla każdej wartości średniej wielkości wejściowej z zależności:

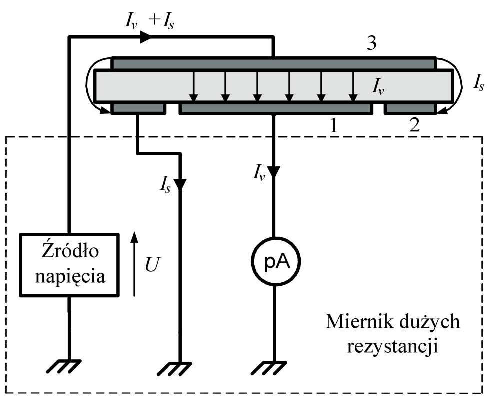
$$U_A\left(\overline{x}_j\right) = t_{p,\nu} \cdot u_A\left(\overline{x}_j\right), \tag{26}$$

w której: $t_{p,\nu} = k_{Aj}$ jest współczynnikiem rozszerzenia, równym kwantylowi rozkładu t-Studenta, zależnym od liczby stopni swobody $\nu = n - 1$ (n – liczba pomiarów), $u(\overline{x}_j) = s_A(\overline{x}_j)$ jest niepewnością standardową wartości wielkości wejściowej, równą odchyleniu standardowemu wartości średniej.

5. Przykłady

5.1. Przykład obliczania niepewności rozszerzonej, gdy niepewności typu B są większe od niepewności typu A

Rozważmy przykład pomiaru rezystywności skrośnej próbki płaskiej dielektryka i obliczenia jej niepewności rozszerzonej na poziomie ufności 0,95. Rezystywność skrośną ρ_v mierzy się zawsze metodą pośrednią [4, 5]. Na powierzchniach badanej próbki umieszcza się elektrody i w układzie przedstawionym na rys. 1 między elektrodami 1 i 3 mierzy się rezystancję skrośną $R_v = U/I_v$ (miernik wyskalowany jest bezpośrednio w jednostkach rezystancji).



Rys. 1. Układy do pomiaru rezystancji skrośnej dielektryków stałych:
U – napięcie, I_v – prąd skrośny, I_s –prąd powierzchniowy, pA – pikoamperomierz;
elektrody: 1 – pomiarowa, 2 – ochronna, 3 – napięciowa

Wartość rezystywności skrośnej oblicza ze wzoru:

$$\rho_v = R_v \frac{A}{h} + p(\rho_{vT}) + p(\rho_{vW}), \tag{27}$$

w którym: R_v jest rezystancją skrośną, A – efektywną powierzchnią elektrody pomiarowej, h – grubością próbki, $p(\rho_{vT})$ – poprawką temperaturową rezystywności skrośnej uwzględniającą zmianę temperatury próbki, $p(\rho_{vW})$ – poprawką wilgotnościową rezystywności skrośnej uwzględniająca zmianę wilgotności otoczenia próbki.

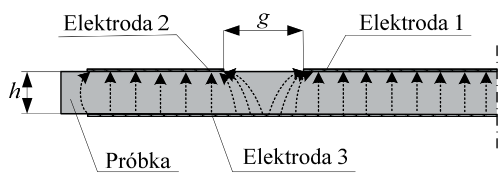
Efektywną powierzchnię A elektrody pomiarowej oblicza się z wyrażenia [4-6]:

$$A = \frac{\pi(d_1 + Bg)^2}{4}, \tag{28}$$

w którym: d_1 jest średnicą elektrody pomiarowej, g – szerokością szczeliny, B – współczynnikiem wzrostu efektywnego obramowania elektrody pomiarowej.

Współczynnik B, wynikający z rozszerzania się pola elektrycznego w szczelinie g poza obszar elektrody pomiarowej (rys. 2), oblicza się ze wzoru:

$$B = 1 - \frac{4}{\pi}\frac{h}{g} \cdot \ln\cosh\left(\frac{\pi}{4}\frac{g}{h}\right). \tag{29}$$



Rys. 2. Rozkład pola elektrycznego w objętości próbki dielektryka w układzie trójelektrodowym podczas pomiarów rezystywności skrośnej

Wszystkie wielkości, niezbędne do obliczenia rezystywności skrośnej, mierzy się niezależnie. Są więc one nieskorelowane. Ponieważ w pomiarach rezystywności skrośnej niepewności typu B są większe od niepewności typu A, to niepewność rozszerzoną na poziomie ufności 0,95 można obliczać metodą przybliżoną ze wzoru (18), który dla rezystywności skrośnej przyjmuje postać [7]:

$$U(\rho_v) = 1{,}15\sqrt{c_A^2 U^2(A) + c_h^2 U^2(h) + c_{R_v}^2 U^2(R_v) + c_T^2 U^2\left[p(\rho_{vT})\right] + c_W^2 U^2\left[p(\rho_{vW})\right]}, \tag{30}$$

a w którym poszczególne współczynniki wrażliwości określone są zależnościami:

$$c_A = \frac{\partial \rho_v}{\partial A} = \frac{R_v}{h}, \tag{31}$$

$$c_h = \frac{\partial \rho_v}{\partial h} = -\frac{A}{h^2} R_v, \tag{32}$$

$$c_{R_v} = \frac{\partial \rho_v}{\partial R_v} = \frac{A}{h} , \tag{33}$$

$$c_T = 1 \quad \text{i} \quad c_W = 1.$$

Efektywna powierzchnia elektrody pomiarowej A jest określona wzorem (28), a zatem niepewność efektywnej powierzchni elektrody pomiarowej:

$$U(A) = \sqrt{c_{d_1}^2 U^2(d_1) + c_g^2 U^2(g) + c_B^2 U^2(B)} , \tag{34}$$

w którym poszczególne współczynniki wrażliwości:

$$c_{d_1} = \frac{\partial A}{\partial d_1} = \frac{\pi}{2}(d_1 + Bg) , \tag{35}$$

$$c_g = \frac{\partial A}{\partial g} = \frac{\pi}{2} B(d_1 + Bg) , \tag{36}$$

$$c_B = \frac{\partial A}{\partial B} = \frac{\pi}{2} g(d_1 + Bg) . \tag{37}$$

Współczynnik B jest określony zależnością (29), zatem niepewność tego współczynnika:

$$U(B) = \sqrt{c_h^2 U^2(h) + c_g^2 U^2(g)} , \tag{38}$$

gdzie poszczególne współczynniki wrażliwości:

$$c_h = \frac{\partial B}{\partial h} = \frac{g}{h^2}\left[\frac{4}{\pi}\ln\cosh\left(\frac{\pi}{4}\frac{g}{h}\right) + \frac{g}{h}\operatorname{tgh}\left(\frac{\pi}{4}\frac{g}{h}\right)\right], \tag{39}$$

$$c_g = \frac{\partial B}{\partial g} = -\frac{1}{h}\left[\frac{4}{\pi}\ln\cosh\left(\frac{\pi}{4}\frac{g}{h}\right) + \frac{g}{h}\operatorname{tgh}\left(\frac{\pi}{4}\frac{g}{h}\right)\right]. \tag{40}$$

Grubość próbki h mierzy się przed nałożeniem elektrod czujnikiem zegarowym w różnych jej miejscach obszaru elektrody pomiarowej. Na podstawie wzoru (1) niepewność rozszerzona typu A wartości średniej grubości próbki:

$$U_A(\overline{h}) = k_{Ah} u_A(\overline{h}) , \tag{41}$$

gdzie: $k_{Ah} = t_{p,\nu}$ jest współczynnikiem rozszerzenia dla niepewności typu A pomiarów grubości próbki h, równym kwantylowi rozkładu t-Studenta, $u_A(\overline{h})$ – niepewnością standardową typu A wartości średniej grubości próbki.

Niepewność rozszerzoną pomiaru grubości próbki, zgodnie ze wzorem (11) oblicza się z zależności:

$$U(\overline{h}) = \sqrt{U_A^2(\overline{h}) + (\Delta_g \overline{h})^2} , \tag{42}$$

w której $\Delta_g \overline{h}$ jest błędem granicznym przyrządu pomiarowego użytego do pomiaru grubości próbki.

Pomiary średnicy elektrody pomiarowej d_1 wykonuje się kilkakrotnie w różnych jej miejscach najczęściej suwmiarką. Niepewność rozszerzona typu A wartości średniej średnicy elektrody pomiarowej:

$$U_A\left(\overline{d}_1\right) = k_{Ad_1} u_A\left(\overline{d}_1\right), \tag{43}$$

gdzie: k_{Ad_1} jest współczynnikiem rozszerzenia dla niepewności typu A pomiarów średnicy elektrody pomiarowej d_1, $u_A(\overline{d}_1)$ – niepewnością standardową typu A wartości średniej elektrody pomiarowej.

Niepewność rozszerzona pomiaru średnicy elektrody pomiarowej ma postać:

$$U\left(\overline{d}_1\right) = \sqrt{U_A^2\left(\overline{d}_1\right) + \left(\Delta_g \overline{d}_1\right)}, \tag{44}$$

gdzie $\Delta_g \overline{d}_1$ jest błędem granicznym przyrządu pomiarowego użytego do pomiaru średnicy.

Szerokość szczeliny g między elektrodą pomiarową a elektrodą ochronną mierzy się najczęściej mikroskopem pomiarowym w kilku miejscach. Niepewność rozszerzona typu A wartości średniej szerokości szczeliny ma postać:

$$U_A\left(\overline{g}\right) = k_{Ag} u_A\left(\overline{g}\right), \tag{45}$$

gdzie: k_{Ag} jest współczynnikiem rozszerzenia dla niepewności typu A pomiarów szerokości szczeliny g, $u_A(\overline{g})$ – niepewnością standardową typu A wartości średniej szerokości szczeliny.

Niepewność rozszerzona pomiaru szerokości szczeliny:

$$U\left(\overline{g}\right) = \sqrt{U_A^2\left(\overline{g}\right) + \left(\Delta_g \overline{g}\right)}, \tag{46}$$

gdzie $\Delta_g \overline{g}$ jest błędem granicznym przyrządu pomiarowego zastosowanego do pomiaru szerokości szczeliny.

W tabelach 1 ÷ 3 podano wyniki pomiarów oraz obliczeń wartości średnich i ich niepewności standardowych oraz wyniki obliczeń niepewności rozszerzonych grubości próbki, średnicy elektrody pomiarowej i szerokości szczeliny między elektrodą pomiarową a elektrodą ochronną.

Pomiary rezystancji skrośnej R_v próbki wykonano miernikiem analogowym wysokich rezystancji i uzyskano wynik:

$$R_v = 28{,}0\ \mathrm{T}\Omega = 2{,}80 \cdot 10^{13}\ \Omega.$$

Względny błąd graniczny pomiaru tej rezystancji wynosił $\delta_g R_v = 6{,}2$ %, a błąd bezwzględny graniczny:

$$\Delta_g R_v = \frac{R_v \cdot \delta_g R_v}{100} = \frac{2{,}80 \cdot 10^{13} \cdot 6{,}2}{100} = 0{,}173 \times 10^{13}\ \Omega.$$

Ponieważ wynik pomiaru rezystancji był stabilny i nie zmieniał się w czasie, nie powtarzano pomiarów. Na niepewność pomiaru rezystancji skrośnej miała wpływ tylko niepewność typu B, która na poziomie ufności 0,95 wynosi:

$$U\left(R_v\right) = U_B\left(R_v\right) \cong \Delta_g R_v = 0{,}173 \cdot 10^{13}\ \Omega.$$

Tabela 1. Wyniki pomiarów grubości próbki i obliczeń jej niepewności rozszerzonej

I	h_i (m)	$\bar{h}$ (m)	$u_A(\bar{h})$ (m)	k_{Ah}	$U_A(\bar{h})$ (m)	$\Delta_g\bar{h}$ (m)	$U(\bar{h})$ (m)
1	$1{,}702 \cdot 10^{-3}$						
2	$1{,}656 \cdot 10^{-3}$						
3	$1{,}674 \cdot 10^{-3}$	$1{,}668 \cdot 10^{-3}$	$0{,}011 \cdot 10^{-3}$	2,78	$0{,}031 \cdot 10^{-3}$	$0{,}001 \cdot 10^{-3}$	$0{,}031 \cdot 10^{-3}$
4	$1{,}636 \cdot 10^{-3}$						
5	$1{,}672 \cdot 10^{-3}$						

Tabela 2. Wyniki pomiarów średnicy elektrody pomiarowej i obliczeń niepewności rozszerzonej

i	d_{1i} (m)	$\bar{d}_1$ (m)	$u_A(\bar{d}_1)$ (m)	k_{Ad_1}	$U_A(\bar{d}_1)$ (m)	$\Delta_g\bar{d}_1$ (m)	$U(\bar{d}_1)$ (m)
1	$50{,}00 \cdot 10^{-3}$						
2	$49{,}96 \cdot 10^{-3}$						
3	$49{,}94 \cdot 10^{-3}$	$49{,}974 \cdot 10^{-3}$	$0{,}011 \cdot 10^{-3}$	2,78	$0{,}031 \cdot 10^{-3}$	$0{,}030 \cdot 10^{-3}$	$0{,}043 \cdot 10^{-3}$
4	$49{,}98 \cdot 10^{-3}$						
5	$49{,}99 \cdot 10^{-3}$						

Tabela 3. Wyniki pomiarów szerokości szczeliny i obliczeń jej niepewności rozszerzonej

i	g_i (m)	$\bar{g}$ (m)	$u_A(\bar{g})$ (m)	k_{Ag}	$U_A(\bar{g})$ (m)	$\Delta_g(\bar{g})$ (m)	$U(\bar{g})$ (m)
1	$1{,}88 \cdot 10^{-3}$						
2	$1{,}89 \cdot 10^{-3}$						
3	$1{,}89 \cdot 10^{-3}$						
4	$1{,}87 \cdot 10^{-3}$						
5	$1{,}89 \cdot 10^{-3}$	$1{,}887 \cdot 10^{-3}$	$0{,}004 \cdot 10^{-3}$	2,26	$0{,}009 \cdot 10^{-3}$	$0{,}01 \cdot 10^{-3}$	$0{,}013 \cdot 10^{-3}$
6	$1{,}87 \cdot 10^{-3}$						
7	$1{,}88 \cdot 10^{-3}$						
8	$1{,}89 \cdot 10^{-3}$						
9	$1{,}90 \cdot 10^{-3}$						
10	$1{,}91 \cdot 10^{-3}$						

Poprawkę temperaturową rezystywności skrośnej, uwzględniającą zmianę temperatury próbki o ΔT w porównaniu z temperaturą normalną (T = 23 °C), wyznacza się ze wzoru:

$$p\left(\rho_{vT}\right) = k_{Tv}\Delta T\,, \tag{47}$$

a jej niepewność rozszerzoną z zależności:

$$U\left[p\left(\rho_{vT}\right)\right]=\sqrt{\left(\Delta T\right)^2 U^2\left(k_{Tv}\right)+k_{Tv}^2 U^2\left(\Delta T\right)}\,, \tag{48}$$

w której k_{Tv} jest temperaturowym współczynnikiem zmian rezystywności skrośnej, ΔT – różnicą między temperaturą otoczenia w czasie pomiarów a temperaturą, dla której określa się rezystywność skrośną, $U(k_{Tv})$ – niepewnością rozszerzoną temperaturowego współczynnika zmian rezystywności skrośnej, $U(\Delta T)$ – niepewnością rozszerzoną określenia różnicy temperatur.

Temperatura w laboratorium w czasie wykonywania pomiarów wynosiła T = 23 °C ± 2 °C, zatem $\Delta T = 0$ i poprawka $p_T(\rho_v) = 0$. Ale zerowa poprawka nie oznacza jej zerowej niepewności, gdyż temperatura otoczenia w laboratorium ulega wahaniom w granicach $\Delta_g T = \pm\, 2$ °C. Ponieważ dla badanej próbki temperaturowy współczynnik zmian rezystywności skrośnej k_{Tv} = 1 TΩ/°C, to dla $\Delta T = 0$ poprawka $p_T(\rho_v) = 0$, a niepewność standardowa tej poprawki, zgodnie z zależnością (48) wynosi:

$$U\left[p_T\left(\rho_v\right)\right]=k_{Tv}U(\Delta T)\cong k_{Tv}\Delta_g T=1\cdot 10^{12}\cdot 2=2\cdot 10^{12}\ \Omega\,.$$

Poprawkę wilgotnościową zmiany rezystancji skrośnej, uwzględniającą zmianę wilgotności powietrza otaczającego próbkę o ΔW w porównaniu z wilgotnością normalną W = 50 %, wyznacza się ze wzoru:

$$p\left(\rho_{vW}\right)=k_{Wv}\Delta W\,, \tag{49}$$

a jej niepewność standardową z zależności:

$$U\left[p_W\left(\rho_v\right)\right]=\sqrt{\left(\Delta W\right)^2 U^2\left(k_{Wv}\right)+k_{Wv}^2 U^2\left(\Delta W\right)}\,, \tag{50}$$

w której k_{Wv} jest wilgotnościowym współczynnikiem zmian rezystywności skrośnej, ΔW – różnicą między wilgotnością względną otoczenia w czasie pomiarów rezystywności skrośnej a wilgotnością względną, dla której określa się rezystywność skrośną, $U(k_{Wv})$ – niepewnością wilgotnościowego współczynnika zmian rezystywności skrośnej, $U(\Delta W)$ – niepewnością określenia różnicy wilgotności.

Wilgotność w laboratorium w czasie wykonywania pomiarów wynosiła (50 ± 10) %, dlatego $\Delta W = 0$ i poprawka $p_W(\rho_v) = 0$. Ale zerowa poprawka nie oznacza jej zerowej niepewności, gdyż wilgotność powietrza w laboratorium ulega wahaniom w granicach $\Delta_g W = \pm\, 10$ %. Wartość wilgotnościowego współczynnika k_{Wv} = 0,2 TΩ/%, to dla $\Delta W = 0$ poprawka $p(\rho_{vT}) = 0$ i niepewność standardowa tej poprawki, obliczona z zależności (50) wynosi:

$$U\left[p_W\left(\rho_v\right)\right]=k_{Wv}U(\Delta W)\cong k_{Wv}\Delta_g W=0{,}2\cdot 10^{12}\cdot 10=2\cdot 10^{12}\ \Omega\,.$$

Bilans obliczeń (budżet) niepewności rozszerzonej na poziomie ufności p = 0,95 przedstawiono w tabelach 4 ÷ 6. Najpierw obliczono niepewność współczynnika wzrostu efektywnej powierzchni elektrody pomiarowej (tabela 4), a następnie niepewność obliczenia efektywnej powierzchni elektrody pomiarowej (tabela 5). W tabeli 6, wykorzystując wyniki obliczeń z tabeli 5, zestawiono bilans obliczeń niepewności rozszerzonej rezystywności skrośnej.

Tabela 4. Bilans niepewności współczynnika wzrostu efektywnego obramowania elektrody pomiarowej

Mierzona wielkość X_j	Wartość średnia $\overline{x}_j$	Współczynnik wrażliwości c_j	Niepewność rozszerzona $U(\overline{x}_j)$	$c_j^2 \cdot U_2(\overline{x}_j)$
Grubość h	$1{,}668 \cdot 10^{-3}$ m	-189 m^{-1}	$0{,}031 \cdot 10^{-3}$ m	$34{,}32 \cdot 10^{-6}$
Szerokość g	$1{,}887 \cdot 10^{-3}$m	167 m^{-1}	$0{,}014 \cdot 10^{-3}$ m	$5{,}47 \cdot 10^{-6}$
Współczynnik B	0,6042		$\Sigma c_j^2 \cdot U^2(Xj) = 39{,}80 \cdot 10^{-6}$	
Niepewność współczynnika B			$U(B) = 0{,}0073$	

Tabela 5. Bilans niepewności efektywnej powierzchni elektrody pomiarowej

Mierzona wielkość X_j	Wartość średnia $\overline{x}_j$	Współczynnik wrażliwości c_j	Niepewność rozszerzona $U(\overline{x}_j)$	$c_j^2 \cdot U_2(\overline{x}_j)$
Średnica d_1	$49{,}974 \cdot 10^{-3}$ m	$80{,}29 \cdot 10^{-3}$ m	$0{,}043 \cdot 10^{-3}$ m	$11{,}92 \cdot 10^{-12}$ m^4
Szerokość g	$1{,}887 \cdot 10^{-3}$ m	$48{,}52 \cdot 10^{-3}$ m	$0{,}014 \cdot 10^{-3}$ m	$0{,}47 \cdot 10^{-12}$ m^4
Współczynnik B	0,6042	$1{,}515 \cdot 10^{-4}$ m^2	0,0073	$1{,}22 \cdot 10^{-12}$ m^4
Powierzchnia A	$2{,}05 \cdot 10^{-3}$ m^2		$\Sigma c_j^2 \cdot U^2(X_j) = 13{,}61 \cdot 10^{-12}$ m^4	
Niepewność powierzchni elektrody pomiarowej A			$U(A) = 0{,}004 \cdot 10^{-3}$ m^2	

Tabela 6. Bilans niepewności rozszerzonej pomiaru rezystywności skrośnej

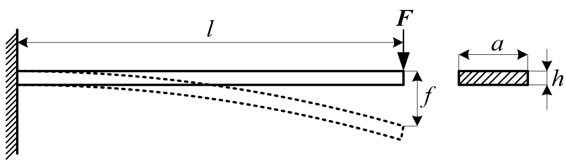
Mierzona wielkość X_j	Wartość średnia $\overline{x}_j$	Współczynnik wrażliwości c_j	Niepewność rozszerzona $U(\overline{x}_j)$	$c_j^2 \cdot U_2(\overline{x}_j)$
Powierzchnia A	$2{,}052 \cdot 10^{-3}$ m^2	$1{,}68 \cdot 10^{16}$ Ω/m	$0{,}004 \cdot 10^{-3}$ m^2	$0{,}5 \cdot 10^{22}$ $\Omega^2 m^2$
Grubość h	$1{,}668 \cdot 10^{-3}$ m	$-2{,}07 \cdot 10^{21}$ Ω	$0{,}028 \cdot 10^{-3}$ m	$33{,}6 \cdot 10^{22}$ $\Omega^2 m^2$
Rezystancja skrośna R_v	$2{,}80 \cdot 10^{13}$ Ω	1,23 m	$0{,}2 \cdot 10^{13}$ Ω	$605{,}2 \cdot 10^{22}$ $\Omega^2 m^2$
Poprawka temp. $p_T(\overline{\rho}_v)$	0	1	$0{,}2 \cdot 10^{13}$ Ωm	$400 \cdot 10^{22}$ $\Omega^2 m^2$
Poprawka wilg. $p_W(\overline{\rho}_v)$	0	1	$0{,}2 \cdot 10^{13}$ Ωm	$400 \cdot 10^{22}$ $\Omega^2 m^2$
Rezystywność skrośna ρ_v	$3{,}45 \cdot 10^{13}$ Ωm		$\Sigma c_j^2 \cdot U^2(X_j) = 1439{,}3 \cdot 10^{32}$ $\Omega^2 m^2$	
Niepewność rozszerzona rezystywności skrośnej			$U(\rho_v) = 0{,}44 \cdot 10^{13}$ Ωm	

Obliczona metodą uproszczoną niepewność pomiarów rezystywności skrośnej próbki płaskiej dielektryka na poziomie ufności $p = 0{,}95$ ma prawie taką samą wartość jak niepewność rozszerzona obliczona metodą dokładnie zgodną z przewodnikiem GEUM w przykładzie zamieszczonym w rozdziale 10.2.9 książki autora [4], tj. $U(\rho_v) = 0{,}44 \cdot 10^{13}$ Ωm. Dowodzi to, że wyniki obliczeń niepewności rozszerzonej pomiarów technicznych metodą przybliżoną są zgodne z wynikami obliczeń niepewności rozszerzonej metoda zalecaną przez przewodnik GEUM [1]. Należy zwrócić uwagę, że mimo przedsięwzięcia wszystkich możliwych zabiegów dla prawidłowego wykonania pomiarów, niepewność względna pomiaru rezystywności skrośnej jest dość duża i wynosi w tym przykładzie aż 13 %. Wyznaczenie rezystywności skrośnej z niepewnością względną mniejszą od 10 %, według doświadczenia autora, jest praktycznie nierealne.

5.2. Przykład obliczania niepewności rozszerzonej, gdy niepewności typu A są pomijalnie małe, a decydujące znaczenia mają niepewności typu B

Rozważmy przykład wyznaczenia strzałki ugięcia belki stalowej jednostronnie zamocowanej w temperaturze $\vartheta = 50$ °C przy obciążeniu siłą $F = (50{,}00 \pm 0{,}01)$ N (rys. 3) oraz niepewności jej określenia na poziomie ufności 0,95. Wymiary belki zmierzono w temperaturze $\vartheta_o = 20$ °C ± 2 °C, uzyskując następujące wyniki:
- długość $l = 250$ mm z błędem granicznym $\Delta_g l = \pm 1$ mm,
- szerokość $a = 30{,}0$ mm z $\Delta_g a = \pm\ 0{,}5$ mm,
- grubość $h = 4{,}00$ mm z $\Delta_g h = \pm\ 0{,}02$ mm.

Parametry stali, z której wykonano belkę, podane w specyfikacji producenta, dla temperatury 20 °C wynoszą:
- moduł Younga $E = 210{,}0$ kNmm^{-2} i jego błąd graniczny $\Delta_g E = \pm\ 0{,}5$ kNmm^{-2},
- współczynnik temperaturowy modułu Younga $\beta = (-5 \div -3)\cdot 10^{-4}$ °C^{-1},
- współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = (3 \div 7)\cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, w zakresie temperatur 0 ÷ 100 °C.



Rys. 3. Ugięcie jednostronnie zamocowanej belki

Strzałkę ugięcia belki jednostronnie zamocowanej oblicza się ze wzoru [8]:

$$f = \frac{4l^3F}{ah^3E}. \tag{51}$$

Najpierw należy skorygować wartości poszczególnych wielkości zmierzonych w temperaturze 20 °C do wartości w temperaturze 50 °C poprzez wprowadzenie poprawek temperaturowych. Wartość mierzonej wielkości w temperaturze ϑ określa się z wyrażenia:

$$x_{j\vartheta} = x + p\left(x_j\right), \tag{52}$$

w którym: x jest wartością zmierzoną w temperaturze 20 °C, $p(x_j)$ – poprawką temperaturową mierzonej wielkości.

Dla wymiarów geometrycznych poprawkę temperaturową obliczono ze wzoru:

$$p\left(x_j\right) = x\alpha\Delta\vartheta, \tag{53}$$

a dla modułu Younga z zależności:

$$p(E) = E\beta\Delta\vartheta, \tag{54}$$

gdzie: α jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej materiału, z którego wykonano belkę, β – współczynnikiem temperaturowym modułu Younga, $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_o = 30$ °C – różnicą temperatury, ϑ_o – temperaturą odniesienia, w której wykonano pomiary wymiarów geometrycznych i wyznaczono moduł Younga (20 °C), ϑ – temperaturą dla której oblicza się strzałkę ugięcia (50 °C).

Poprawka temperaturowa długości belki:

$$p(l) = l\alpha\Delta\vartheta = 250 \cdot (3\ldots7) \cdot 10^{-6} \cdot 30 = (0{,}0225\ldots0{,}0525)\text{ mm} = (0{,}0375 \pm 0{,}0150)\text{ mm},$$

jej szerokości:

$$p(a) = a_0\alpha\Delta\vartheta = 30 \cdot (3\ldots7) \cdot 10^{-6} \cdot 30 = (0{,}0027\ldots0{,}0063)\text{ mm} = (0{,}0045 \pm 0{,}0027)\text{ mm}$$

i grubości:

$$p(h) = h\alpha\Delta\vartheta = 4 \cdot (3\ldots7) \cdot 10^{-6} \cdot 30 = (0{,}00036\ldots0{,}00084)\text{ mm} = (0{,}00060 \pm 0{,}00024)\text{ mm}$$

oraz modułu Younga:

$$p(E) = E\beta\Delta\vartheta = 210 \cdot (-5\ldots-3) \cdot 10^{-4} \cdot 30 = (-3{,}15\ldots-1{,}89)\text{ kNmm}^{-2} = (-2{,}52 \pm 0{,}63)\text{ kNmm}^{-2}.$$

Poprawki temperaturowe wymiarów geometrycznych mają wartości pomijalnie małe i można przyjąć, że $l_\vartheta = l$, $a_\vartheta = a$, i $h_\vartheta = h$. Natomiast współczynnik Younga w temperaturze 50 °C ma wartość:

$$E_\vartheta = E + p(E) = 210{,}00 - 2{,}52 = 207{,}48\text{ kNmm}^{-2}.$$

Błąd graniczny poprawki temperaturowej dla modułu Younga, określony jest zmiennością współczynnika temperaturowego modułu Younga w granicach $[-5, -3] \cdot 10^{-4}$ °C^{-1} i wynosi:

$$\Delta_g p(E) = \pm\, 0{,}63\text{ kNmm}^{-2}.$$

Błąd graniczny wyznaczenia modułu Younga w temperaturze 50 °C jest sumą błędu granicznego wyznaczenia jego wartości w temperaturze 20 °C i błędu granicznego jego temperaturowej poprawki:

$$\Delta_g E_\vartheta = \Delta_g E + \Delta_g p(E) = \pm\,(0{,}5 + 0{,}63) = \pm\, 1{,}13\text{ kNmm}^{-2}.$$

Strzałka ugięcia belki w temperaturze 50 °C wynosi:

$$f_\vartheta = \frac{4l^3F}{ah^3E_\vartheta} = \frac{4 \cdot (250\text{ mm})^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3}\text{ kN}}{30\text{ mm} \cdot (4\text{ mm})^3 \cdot 207{,}48\text{ kNmm}^{-2}} = 7{,}845\text{ mm}.$$

Niepewność bezwzględną rozszerzoną wyznaczenia strzałki ugięcia belki na poziomie ufności 0,95 można obliczyć metodą uproszczoną ze wzoru (20), który w tym przypadku przyjmie postać:

$$U(f_\vartheta) = 1{,}15\sqrt{c_l^2\left(\Delta_g l\right)^2 + c_F^2\left(\Delta_g F\right)^2 + c_a^2\left(\Delta_g a\right) + c_h^2\left(\Delta_g h\right)^2 + c_E^2\left(\Delta_g E_\vartheta\right)^2}\ , \qquad (55)$$

w której poszczególne współczynniki wrażliwości określone są zależnościami:

$$c_l = 12\frac{l^2 F}{ah^3 E_\vartheta}\ , \qquad (56)$$

$$c_F = 4\frac{l^3}{ah^3 E_\vartheta}\ , \qquad (57)$$

$$c_a = -4\frac{l^3 F}{a^2 h^3 E_\vartheta}\ , \qquad (58)$$

$$c_h = -12\frac{l^3 F}{ah^4 E_\vartheta}\ , \qquad (59)$$

$$c_{E_\vartheta} = -4\frac{l^3 F}{ah^4 E_\vartheta^2}\ . \qquad (60)$$

W praktyce łatwiej jest obliczyć niepewność rozszerzoną względną na poziomie ufności ze wzoru (22), który w tym przypadku dla strzałki ugięcia przyjmuje postać:

$$W(f) = \frac{U(f)}{f} = 1{,}15\sqrt{3^2\left(\delta_g l\right)^2 + \left(\delta_g F\right)^2 + \left(\delta_g a\right)^2 + 3^2\left(\delta_g h\right)^2 + \left(\delta_g E_\vartheta\right)^2}\ , \qquad (61)$$

gdzie poszczególne błędy graniczne względne wynoszą:

$$\delta_g l = \frac{\Delta_g l}{l} = \pm\frac{1\ \text{mm}}{250\ \text{mm}} = \pm 0{,}004 = \pm 4\cdot 10^{-3}\ ,$$

$$\delta_g F = \frac{\Delta_g F}{F} = \pm\frac{0{,}01\ \text{N}}{50{,}00\ \text{N}} = \pm 0{,}0002 = \pm 0{,}2\cdot 10^{-3}\ ,$$

$$\delta_g a = \frac{\Delta_g a}{a} = \pm\frac{0{,}5\ \text{mm}}{30{,}0\ \text{mm}} = \pm 0{,}0167 = \pm 16{,}7\cdot 10^{-3}\ ,$$

$$\delta_g h = \frac{\Delta_g h}{h} = \pm\frac{0{,}02\ \text{mm}}{4{,}00\ \text{mm}} = \pm 0{,}005 = \pm 5\cdot 10^{-3}\ ,$$

$$\delta_g E_\vartheta = \frac{\Delta_g E_\vartheta}{E_\vartheta} = \pm\frac{1{,}13\ \text{kNmm}^{-2}}{207{,}48\ \text{kNmm}^{-2}} = \pm 0{,}0054 = \pm 5{,}4\cdot 10^{-3}\ .$$

Zatem niepewność względna strzałki ugięcia na poziomie ufności 0,95 wynosi:

$$W(f) = 1{,}15\cdot 10^{-3}\sqrt{9\cdot 4^2 + 0{,}2^2 + 16{,}7^2 + 9\cdot 5^2 + 5{,}4^2} = 29{,}9\cdot 10^{-3},$$

a niepewność rozszerzona bezwzględna, obliczona ze wzoru (23):

$$U(f_\vartheta) = f_\vartheta\cdot W(f_\vartheta) = 7{,}945\ \text{mm}\cdot 29{,}9\cdot 10^{-3} = 0{,}24\ \text{mm}\ .$$

Strzałka ugięcia belki jednostronnie zamocowanej w temperaturze 50 °C, o parametrach podanych w przykładzie, przy obciążeniu na jej końcu siłą 50 N będzie wynosiła 7,85 mm, z niepewnością rozszerzoną 0,24 mm na poziomie ufności p = 0,95, czyli:

$$f_{\vartheta} = (7{,}85 \pm 0{,}24)\ \text{mm, przy}\ p = 0{,}95.$$

6. Wnioski

Obliczenia niepewności pomiarów pośrednich opisanymi metodami przybliżonymi są prostsze w porównaniu z metodą zalecaną w przewodnika GEUM [1]. Wynika to głównie stąd, że nie oblicza się tu niepewności standardowych typu B i wypadkowej liczby stopni swobody. Jeżeli wartości wielkości wejściowych nie są skorelowane, to uzyskiwane wyniki obliczeń niepewności pomiarów technicznych metodami uproszczonymi praktycznie nie różnią się od otrzymywanych metodą zalecaną w przewodniku GEUM. Zostało to wielokrotnie potwierdzone przez autora podczas opracowywania wyników pomiarów w laboratorium badawczym, a także w publikacjach [4 ÷ 7].

Jeżeli jednak wystąpią wątpliwości odnośnie poprawności oszacowania niepewności pomiarów metodą przybliżoną, to należy dokonać walidacji tej metody. W tym celu należy ponownie obliczyć niepewności pomiarów, ale metodą zalecaną przez przewodnik GEUM i ocenić zgodność uzyskanych wyników.

Literatura

[1] *Guide to the expression of uncertainty in measurement.* Wyd. International Organization for Standardization 1995. Tłumaczenie polskie: *Wyrażanie niepewności pomiaru – Przewodnik*. Wyd. Główny Urząd Miar, Warszawa 1996.

[2] S. Kubisa, S. Moskowicz: *Niepewność pomiaru. Próba usystematyzowania pojęć i metod obliczeń*. Pomiary Automatyka Kontrola, 2004, nr 1, s. 32-36.

[3] D. Turzeniecka, S. Kubisa: *The measures of imperfection of chosen approximated methods of combined expanded uncertainty estimation in measurement*. Metrology and Measuring Systems, Vol. III, 1996, nr 3-4, s. 143-155.

[4] M. Lisowski: *Pomiary rezystywności i przenikalności elektrycznej dielektryków stałych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.

[5] M. Lisowski, R. Kacprzyk: *Changes proposed for the IEC 60093 standard concerning measurements of the volume and surface resistivities of electrical insulating materials*. IEEE Transactions on Dielectric and Electrical Insulation, Vol. 13, 2006, nr 1, s. 139-145.

[6] M. Lisowski, A. Skopec: *Effective Area of Thin Guarded Electrode in Determining of Permittivity and Volume Resistivity*. IEEE Transactions on Dielectric and Electrical Insulation, Vol. 16, nr 2, s. 24-31.

[7] M. Lisowski: *Issues of volume resistivity measurement of flat dielectric specimens and evaluation on uncertainty of the measurement results by approximate method at confidence level of 0.95*. Metrology and Measerment Systems, Vol. XVI, 2009, nr 2, s. 233-248.

[8] T. Skubis: *Opracowywanie wyników pomiarów – przykłady*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003.