

OBLICZENIA W POMIARACH POŚREDNICH

Stefan Kubisa

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny

1. Wstęp

Pomiar pośredni to taki, w którym wartość wielkości mierzonej (wielkości wyjściowej, mezurandu) y oblicza się z pozyskanych w różny sposób (z pomiaru, z dokumentacji używanej aparatury, z tablic fizycznych itp.) wartości wielkości wejściowych $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ na podstawie znanej funkcji pomiaru:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N) \quad (1)$$

Wielkościami wejściowymi mogą być:

- wskazania przyrządów pomiarowych,
- wielkości reprezentowane przez wzorce pomiarowe,
- dane zaczerpnięte ze specyfikacji, dokumentacji i podręczników,
- wielkości pochodzące z innych pomiarów,
- tzw. stałe uniwersalne,
- poprawki do wartości ww. wielkości, w tym poprawki ze względu na wielkości wpływające, itp.

Obliczenia obejmują estymatę mezurandu oraz jej niepewność. Spotyka się różne sposoby tych obliczeń, a wybór sposobu jest przedmiotem dyskusji, zresztą nie jedynym. Dyskutuje się też potrzebę rozróżniania między symbolami wielkości i symbolami wartości wielkości. Ten rozdział zajmuje się wartościami wielkości i stosuje dla nich zaprezentowaną we wzorze (1) symbolikę, która budzi kontrowersję, bo raczej nie jest używana w innych publikacjach. Częściej spotykana symbolika typu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$ ma jednak wadę wynikającą stąd, że wtedy, gdy trzeba rozróżnić wyniki wielu obserwacji danej wartości, np. x_2 , powstaje łańcuch indeksów dolnych, np.: $x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots$. W przypadku symboliki proponowanej w tym rozdziale wady tej nie ma – ciąg obserwacji wartości, np. x_2 , ma postać: $x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots$. Dwuznakowe symbole typu x_2 budzą jednak zastrzeżenia. Warto je pokonać, bo w programowaniu komputerowym stosowanie symboli wieloznakowych jest częste i wygodne, chociaż skutkuje koniecznością używania znaków mnożenia w wyrażeniach przedstawiających iloczyny, aby rozróżnić iloczyn symboli jednoznakowych, np. $a \cdot b \cdot c \cdot d$, od iloczynu symboli dwuznakowych, np. $ab \cdot cd$. W symbolu typu x_2 czcionka 2 jest elementem nazwy zmiennej, a nie oznacza liczby 2, i dlatego powinno się ją pisać czcionką pochyłą.

Dalsze rozważania dotyczą takich pomiarów pośrednich, w których zaobserwowano K wartości każdej z wielkości wejściowych $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_N$. Obserwacje tworzą macierz o K wierszach i N kolumnach, pokazaną jako obramowane części tablic 1 i 2.

Wyniki obserwacji można opracować za pomocą jednego z dwóch sposobów:

1. sposób **pierwszy** – obliczanie **kolumnami**,
2. sposób **drugi** – obliczanie **wierszami**.

Sposób **pierwszy** (*kolumnami*) polega na tym, że najpierw oblicza się wartości średnie arytmetyczne xn' wartości wejściowych xn_k ($n = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K$):

$$xn' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K xn_k \quad (2)$$

a następnie estymatę y' (**niepoprawioną!**) – jako funkcję (1) tych wartości średnich:

$$y' = f(x1', x2', \dots, xn', \dots, xN') \quad (3)$$

Obliczanie poprawki do estymaty y' omówiono dalej.

Tab. 1. Macierz obserwacji (obramowana część tablicy) i ilustracja **pierwszego** (*kolumnami*) sposobu obliczania estymaty y' mezurandu

Nr obs.	$x1$	$x2$	...	xn	...	xN
1.	$x1_1$	$x2_1$	...	xn_1	...	xN_1
...	...	...	...	...	...	...
k .	$x1_k$	$x2_k$	...	xn_k	...	xN_k
...	...	...	...	...	...	...
K .	$x1_K$	$x2_K$	...	xn_K	...	xN_K
	$x1'$	$x2'$	...	xn'	...	xN'
						y'

Przy sposobie **drugim** (*wierszami*) najpierw oblicza się wartości estymat częściowych:

$$y_k = f(x1_k, x2_k, \dots, xn_k, \dots, xN_k) \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

a następnie estymatę y'' jako wartość średnią arytmetyczną estymat częściowych:

$$y'' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K y_k \quad (5)$$

Pojawia się zatem pytanie, który sposób jest bardziej poprawny?

Tab. 2. Macierz obserwacji (obramowana część tablicy) i ilustracja **drugiego** (*wierszami*) sposobu obliczania estymaty y'' mezurandu

Nr obs.	$x1$	$x2$	...	xn	...	xN	y
1.	$x1_1$	$x2_1$	...	xn_1	...	xN_1	y_1
...	...	...	...	...	...	...	...
k .	$x1_k$	$x2_k$	...	xn_k	...	xN_k	y_k
...	...	...	...	...	...	...	...
K .	$x1_K$	$x2_K$	...	xn_K	...	xN_K	y_K
							y''

2. Przewodnik a sposoby obliczania estymaty mezurandu. Porównanie stopnia złożoności obliczeń

Zdanie metrologów w kwestii wyboru sposobu obliczania estymaty mezurandu w pomiarach pośrednich nie jest jednolite. *Przewodnik* [1] w podrozdziale 4.4 powiada: „Estymatę wielkości mierzonej ... oblicza się z funkcji (3) dla *estymat wejściowych* ...”. Oznacza to obliczanie metodą pierwszą, czyli *kolumnami*, bo wedle tablicy 1. estymatami wejściowymi są $x_1', \dots, x_{N'}$. Jednak dalej w tym samym podrozdziale *Przewodnik* [1] stwierdza, że „Obydwa sposoby uśredniania dają jednakowe wyniki, jeżeli f jest funkcją liniową”.

Przewodnik [1] dotyka omawianego problemu w kilku miejscach, by na przykładzie obliczeniowym H.2 (równoczesny pomiar rezystancji i reaktancji) wykazać, że oba sposoby dają praktycznie identyczne wyniki. Taka ocena wyniku obliczeń w przykładzie H.2 jest rezultatem słabo przemyślanego doboru danych w tym przykładzie – w otoczeniu kąta fazowego φ rzędu 1 rad funkcje kosinus i sinus występujące w funkcjach pomiaru są słabo nieliniowe. Dalej w tym rozdziale przedstawiono natomiast przykład pomiaru konduktancji przy kącie φ podlegającym losowym zmianom wokół wartości zerowej, dla której funkcja kosinus ma maksimum – jest więc silnie nieliniowa. Wtedy omawiane sposoby obliczania dają wyniki istotnie różniące się. Dalej w H.2 *Przewodnik* [1] stwierdza, że „Jeśli f nie jest funkcją liniową wyniki uzyskane sposobem pierwszym różnią się od wyników uzyskanych sposobem drugim ...”. Generalnie wywody w H.2 nie są zbyt klarowne, ale gdy podejść do nich cierpliwie, to okazuje się, że w sytuacji, gdy zaobserwowane wartości wielkości wejściowych tworzą grupy pozyskane jednocześnie (czyli pomiar pośredni jest jednoczesny), to dogodniejszy do obliczeń jest **sposób drugi – wierszami**. Rozważania co by było, gdyby najpierw wykonano $n_1 = 5$ obserwacji napięcia, następnie $n_2 = 5$ obserwacji prądu i wreszcie $n_3 = 5$ obserwacji kąta przesunięcia fazowego prowadzą *Przewodnik* [1] do konkluzji, że „Jest to faktycznie nie najlepsza procedura pomiarowa ...”, ale autor tego rozdziału jest przekonany, iż żaden prawdziwy metrolog takiej procedury by nie zastosował.

J. M. Jaworski swoje poglądy przedstawia w [2]. Na str. 168 pisze: „Jako estymatę wartości prawdziwej przyjmuje się najczęściej wartość funkcji średnich arytmetycznych wartości wielkości wejściowych ...” – czyli sposób pierwszy. Na str. 173: „Estymatę wartości funkcji można obliczać jako” – tu w innej symbolice wzory (4) i (5) – „i tak liczone wartości nie powinny się istotnie różnić w obszarze stosowności prawa propagacji błędów.” Wreszcie na str. 189: „Estymatę wielkości mierzonej oblicza się jako” – tu znów w innej symbolice wzory (4) i (5) – „przy czym formułę drugą stosuje się, jeżeli cały pomiar składa się z serii ... równoczesnych pomiarów wielkości ... powtarzanych w warunkach powtarzalności.” – czyli **sposób drugi**.

Zarówno [1], jak i [2] zauważają, że w przypadku silnie nieliniowej funkcji pomiaru przy obliczaniu estymaty mezurandu **sposobem pierwszym** (*kolumnami*) należy uwzględnić drugie pochodne wielkości wyjściowej po wielkościach wejściowych. Oznacza to, że do wartości estymaty y' wg (3) należy wprowadzić poprawkę,

która sformułowana w zgodzie z [1] – wzór (H.10) i [2], ale zapisana w symbolice tego artykułu ma postać:

$$py = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i' \partial x_j'} \cdot u(x_i, x_j) \quad (6)$$

przy czym $u(x_i, x_j)$, wg Tablicy 4 w [2], oznacza estymatę kowariancji:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (x_{i_k} - x_i') \cdot (x_{j_k} - x_j') \quad (7)$$

Poprawioną estymatę y' wg (4) dalej oznacza się symbolem yp' :

$$yp' = y' + py \quad (8)$$

Poprawka py jest zerowa, gdy funkcja pomiaru jest liniowa.

Złożoność obliczeń sposobem pierwszym (*kolumnami*) jest na ogół większa, niż sposobem drugim (*wierszami*), zwłaszcza przy dużej liczbie N wielkości wejściowych. Wynika to głównie ze wzoru (6), który, formalnie biorąc, ma $[N \cdot (N + 1)]/2$ składników, co już przy $N = 3$ daje tych składników 6, a przy $N = 5$ – składników 15. Złożoność sposobu drugiego (*wierszami*) polega natomiast głównie na K -krotnym obliczaniu wg wzoru (4). Dalsze wywody pokażą, że w przypadku sposobu pierwszego (*kolumnami*) większa jest też złożoność obliczeń niepewności standardowej typu A. Znaczna złożoność obliczeń zwiększa niebezpieczeństwo pomyłek, czyli błędów grubych.

Ocena omawianych sposobów obliczeń z punktu widzenia złożoności obliczeniowej nie jest tak ważna, jak ocena w aspekcie wiarygodności obliczeń, a więc w aspekcie dokładności pomiaru pośredniego. Tej ostatniej trudno jest dokonać w sposób ogólny. Dlatego dalsze wywody oparto o zalecany w [3] eksperyment symulacyjny Monte Carlo, dotyczący konkretnego przypadku nieliniowej funkcji pomiaru.

3. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo.

Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia estymaty mezurandu

Pomiar pośredni jednoczesny, to taki, w którym, w dowolnym k -tym wierszu tablicy 1 lub 2 wartości zmiennych wejściowych $x1_k, x2_k, \dots, xn_k, \dots, xN_k$, pozyskuje się jednocześnie (w tej samej *chwili*). Oczywiście w realnych warunkach owa *chwila* przedstawia sobą pewien interwał czasu, jednak na tyle krótki, by można było założyć, że w jego obrębie wartości wielkości wejściowych są stałe.

W poprzednim podrozdziale stwierdzono, że dla pomiaru pośredniego jednoczesnego zarówno [1], jak i [2] **zalecają drugi sposób** obliczeń (*wierszami*) ale czynią to w formie zawikłanej, nie w pełni przekonującej. W miarę wiarygodnego rozstrzygnięcia może dostarczyć eksperyment symulacyjny oparty o trafnie dobrany przykład pomiaru. Niech będzie nim pomiar konduktancji G dwójnika przy prądzie przemiennym, polegający na jednoczesnym pomiarze wartości skutecznej U napię-

cia na dwójniku, wartości skutecznej I prądu w dwójniku i wartości φ przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Funkcja pomiaru ma zatem postać:

$$G = \frac{I}{U} \cdot \cos \varphi = f(I, U, \varphi) = f(x1, x2, x3) \quad (9)$$

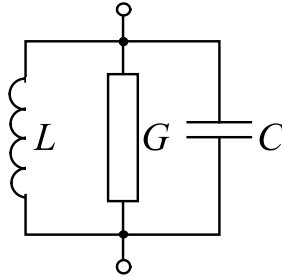
Jest to zatem funkcja nieliniowa ze względu na wielkości wejściowe U oraz φ .

Zakłada się, że oczekiwaną wartością konduktancji jest $EG > 0$, oczekiwaną wartością susceptancji $EB = 0$, znamionową wartością napięcia $EU > 0$. Założenie $EB = 0$ powoduje, że funkcja (9) odznacza się szczególnie silną nieliniowością ze względu na φ – przy $EB = 0$ wartości oczekiwanej przesunięcia fazowego φ jest 0 (zero) i funkcja $\cos \varphi$ ma maksimum.

W tym eksperymencie symulacyjnym pomija się wszelkie efekty systematyczne wywołane niedokładnością przyrządów pomiarowych i pobieraniem energii przez ich obwody wejściowe. Zakłada się natomiast, że efekty losowe wywołują:

- rozrzut napięcia zasilającego układ pomiarowy o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_U ,
- rozrzut konduktancji o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_G ,
- rozrzut susceptancji o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym σ_B .

Wybrany przykład pomiaru nie jest całkowicie oderwany od rzeczywistości. Sytuacja pomiaru konduktancji z zakłóceniem w postaci susceptancji o wartości losowo rozrzuconej wokół 0 (zera) może mieć na przykład miejsce, gdy przedmiotem pomiaru jest konduktancja tłumiąca równoległy obwód rezonansowy LC (rys. 1) przy częstotliwości rezonansowej.



Rys. 1. Model obwodu rezonansowego LC dla małych odchyłeń częstotliwości od częstotliwości rezonansowej

Fluktuacje częstotliwości wokół częstotliwości rezonansowej powodują, że pojawia się różna od zera susceptancja o wartości opisanej wzorem:

$$B \approx 2 \cdot \delta_f \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10)$$

przy czym δ_f jest względnym odchyleniem częstotliwości od częstotliwości rezonansowej, wywołanym np. fluktuacjami częstotliwości źródła zasilającego układ pomiarowy.

Struktura procedury symulacji powinna naśladować strukturę procedur pomiaru – zarówno procedury fizycznej, jak i obliczeniowej. Wynika stąd następujący przebieg symulacji Monte Carlo, zrealizowanej za pomocą aplikacji Mathcad 14.

Symuluje się M (np. $M = 10^5$) pomiarów pośrednich jednoczesnych o numerach $m = 1, \dots, M$. Każdy pomiar składa się z K (np. $K = 5$) obserwacji o numerach $k = 1, \dots, K$. Za pomocą generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie normalnym generuje się niezależne macierze o rozmiarze $K \times M$

- konduktancji o elementach $G_{k,m}$ ($k = 1, \dots, K$; $m = 1, \dots, M$) o wartości oczekiwanej EG i odchyleniu standardowym σ_G – co naśladuje losową zmienność wartości mierzonej,
- susceptancji o elementach $B_{k,m}$ o wartości oczekiwanej $EB = 0$ i odchyleniu standardowym σ_B – co naśladuje losową zmienność zakłócenia, wywołanego wspólnianymi wyżej fluktuacjami częstotliwości,
- wartości napięcia zasilającego układ pomiarowy o elementach $U_{k,m}$ o wartości oczekiwanej EU i odchyleniu standardowym σ_U – co naśladuje losową zmienność wartości skutecznej napięcia zasilającego układ pomiarowy.

Oblicza się macierz wartości prądu o elementach $I_{k,m}$ ($k = 1, \dots, K$; $m = 1, \dots, M$):

$$I_{k,m} = U_{k,m} \cdot \sqrt{G_{k,m}^2 + B_{k,m}^2} \quad (11)$$

Wartości prądu są więc skorelowane z wartościami napięcia, konduktancji i susceptancji.

Oblicza się macierz wartości przesunięcia fazowego o elementach $\varphi_{k,m}$:

$$\varphi_{k,m} = \arctg \frac{B_{k,m}}{G_{k,m}} \quad (12)$$

Przesunięcie fazowe jest więc skorelowane z wartościami konduktancji i susceptancji.

Obliczenia opisane wzorami (11) i (12) modelują zjawiska fizyczne decydujące o wartościach prądu i przesunięcia fazowego.

Macierze o elementach $I_{k,m}$, $U_{k,m}$ i $\varphi_{k,m}$ traktuje się jako wyniki k -tej obserwacji w m -tym pomiarze pośrednim jednoczesnym, złożonym z K obserwacji.

Sposobem pierwszym (kolumnami) niepoprawioną estymatę konduktancji w m -tym symulowanym pomiarze, zgodnie z (2) i (3), oblicza się ze wzorów:

$$I'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K I_{k,m}, \quad U'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K U_{k,m}, \quad \varphi'_m = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \varphi_{k,m}, \quad G'_m = \frac{I'_m}{U'_m} \cdot \cos \varphi'_m \quad (13)$$

Poprawkę w sposób ogólny wyrażają wzory (6) i (7), a poprawioną estymatę – (8). Wzory (6) i (8) w danym konkretnym przypadku – patrz (9) – przyjmują formę:

$$pG_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x'_m \partial x'_m} \cdot u(x_i, x_j) \quad \text{przy czym} \quad \begin{aligned} x'_m &= I'_m \\ x'_m &= U'_m; \quad G'_m = G'_m + pG_m \\ x'_m &= \varphi'_m \end{aligned} \quad (14)$$

Znacznie **prostsze** jest obliczanie **sposobem drugim** (*wierszami*). Sprowadza się ono do wykorzystania wzorów:

$$G_{k,m} = \frac{I_{k,m}}{U_{k,m}} \cdot \cos \varphi_{k,m} ; \quad G_m'' = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K G_{k,m} \quad (15)$$

Wyniki symulacji w odniesieniu do estymat przedstawiono w kolumnie 2 tablicy 3, gdzie podano wartości średnie arytmetyczne estymat z M symulowanych pomiarów o K obserwacjach.

4. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo. Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia odchylenia empirycznego

Rozważania oparto tutaj o przykład pomiaru przyjętego za podstawę eksperymentu symulacyjnego. I tak w m -tym pomiarze odchylenie empiryczne estymaty G' , obliczanej **sposobem pierwszym** (*kolumnami*) wyraża się wzorem:

$$s_m(G'_m) = \sqrt{\left[\frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot s_m(I'_m) \right]^2 + \left[\frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot s_m(U'_m) \right]^2 + \left[\frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot s_m(\varphi'_m) \right]^2 +} \\ + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot u_m(I, U) + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial U'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot u_m(U, \varphi) + 2 \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial \varphi'_m} \cdot \frac{\partial G'_m}{\partial I'_m} \cdot u_m(\varphi, I) \quad (16)$$

zawierającym pochodne cząstkowe estymaty G' wartości wyjściowej po estymatach I' , U' i φ' wartości wejściowych, odchylenia empiryczne wartości wejściowych:

$$s_m(x'_m) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K (x_{k,m} - x'_m)^2}{K \cdot (K-1)}} \quad \text{przy czym} \quad x = \begin{cases} I \\ \text{lub } U \\ \text{lub } \varphi \end{cases} \quad (17)$$

oraz empiryczne estymaty kowariancji (8):

$$u_m(I, U) = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (I_{k,m} - I'_m) \cdot (U_{k,m} - U'_m) \\ u_m(U, \varphi) = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (U_{k,m} - U'_m) \cdot (\varphi_{k,m} - \varphi'_m) \\ u_m(\varphi, I) = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (\varphi_{k,m} - \varphi'_m) \cdot (I_{k,m} - I'_m) \quad (18)$$

W przeciwieństwie do tak złożonej procedury obliczania odchylenia empirycznego estymaty G' , obliczanej sposobem pierwszym (*kolumnami*), obliczanie odchylenia empirycznego estymaty G'' obliczanej **sposobem drugim** (*wierszami*) sprowadza się do wykorzystania wzoru:

$$s_m(G''_m) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K (G_{k,m} - G''_m)^2}{K \cdot (K-1)}} \quad (19)$$

Wyniki symulacji w odniesieniu do odchyłeń empirycznych przedstawiono w kolumnie 3 tablicy 3, gdzie podano wartości średniokwadratowe odchyłeń empirycznych z M symulowanych pomiarów o K obserwacjach.

Zgodnie z koncepcjami *Przewodnika* [1] obliczone odchylenia empiryczne identyfikuje się z niepewnościami standardowymi typu A.

5. Eksperyment symulacyjny Monte Carlo.

Pomiar pośredni jednoczesny – obliczenia prawdopodobieństwa

Przy przyjętym w eksperymencie założeniu o pominięciu efektów systematycznych wywołanych niedokładnością przyrządów pomiarowych, niepewnością rozszerzoną $U_m(G_m)$ m -tego pomiaru jest iloczyn współczynnika rozszerzenia przez niepewność standardową typu A, czyli przez odchylenie empiryczne $s_m(G_m)$. Współczynnikiem rozszerzenia jest natomiast kwantyl rozkładu t -Studenta z liczbą stopni swobody $\nu = K - 1$ przy założonym poziomie ufności p , czyli $t_p(\nu)$. Tak więc niepewnością m -tego pomiaru jest:

$$U_m(G_m) = t_p(\nu) \cdot s_m(G_m) \text{ przy czym } G_m = Gp'_m \text{ lub } G_m = G''_m \quad (20)$$

Tab. 3. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni **jednoczesny**.

Wartości stałe: $M = 10^5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_e w % dla poziomu ufności $p = 95 \%$
1.	$K = 5, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
2.	Pierwszy (kolumnami)	100,001	0,278	98,5
3.	Drugi (wierszami)	100,000	0,134	95,0
4.	$K = 100, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
5.	Pierwszy (kolumnami)	100,003	0,0753	100,0
6.	Drugi (wierszami)	100,000	0,0300	95,2
7.	$K = 5, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
8.	Pierwszy (kolumnami)	99,200	0,278	44,4
9.	Drugi (wierszami)	100,000	0,134	95,0
10.	$K = 100, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
11.	Pierwszy (kolumnami)	99,009	0,0756	0,0
12.	Drugi (wierszami)	100,000	0,0300	95,1

Ponieważ w eksperymencie symulacyjnym znana jest wartość oczekiwana EG (wartość prawdziwa!) mierzonej wielkości, więc dla M symulowanych pomiarów można obliczyć prawdopodobieństwo empiryczne P_e tego, że EG mieści się w przedziale ufności:

$$\begin{aligned}
 P_e \{EG \in [G_m - U_m(G_m), G_m + U_m(G_m)]\} = \\
 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M \begin{cases} 1 & \text{gdy } EG \in [G_m - U_m(G_m), G_m + U_m(G_m)] \\ 0 & \text{gdy przeciwnie} \end{cases} \quad (21)
 \end{aligned}$$

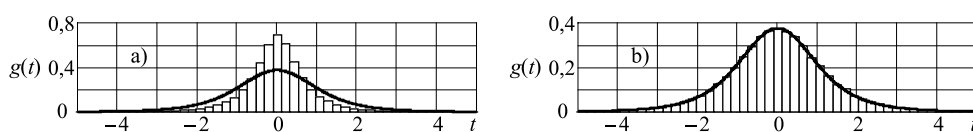
Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa P_e przedstawiono w kolumnie 4 tablicy 3.

6. Pomiar pośredni jednoczesny – dyskusja wyników eksperymentu symulacyjnego

Wyniki eksperymentu symulacyjnego, zaprezentowane w tablicy 3, jednoznacznie wskazują **drugi sposób obliczeń (wierszami)** jako ten, który w pomiarze pośrednim jednoczesnym prowadzi do poprawnych wartości:

- estymaty mezurandu – kol. 2 tablicy 3 – wartość średnia arytmetyczna estymat z $M = 10^5$ symulowanych pomiarów jest, praktycznie biorąc, równa założonej wartości oczekiwanej EG , czyli wartości prawdziwej,
- odchylenia empirycznego estymaty mezurandu – kol. 3 tablicy 3 – wartość średniokwadratowa odchylenia empirycznego z $M = 10^5$ symulowanych pomiarów jest, praktycznie biorąc, równa wartości teoretycznej, równej $\sigma_G/\sqrt{K}$, tzn. $0,134 \% \cdot EG$ dla $K = 5$ i $0,03 \% \cdot EG$ dla $K = 100$,
- prawdopodobieństwa tego, że wartość EG mieści się w przedziale niepewności rozszerzonej – kol. 4 tablicy 3 – prawdopodobieństwo empiryczne P_e jest, praktycznie biorąc, równe założonemu poziomowi ufności.

O przewadze drugiego sposobu obliczeń (*wierszami*) nad pierwszym (*kolumnami*) świadczą też wyniki testu zgodności histogramu empirycznej zmiennej t -Studenta z wykresem tej zmiennej dla tej samej liczby stopni swobody pokazane w [4] i na rys. 2.



Rys. 2. Histogramy gęstości prawdopodobieństwa $g(t)$ empirycznej zmiennej t -Studenta na tle wykresu statystyki Studenta dla liczby stopni swobody 4 i dla estymat obliczonych:

- a) – **sposobem pierwszym (kolumnami)**, b) – **sposobem drugim (wierszami)**
dla $K = 5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$ oraz $\sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$

7. Pomiar pośredni niejednoczesny – eksperyment symulacyjny

W toku dyskusji na konferencjach naukowych, na których autor prezentował przedstawianą tu problematykę, pojawiło się pytanie, jak kształtują się wyniki obliczeń omawianymi dwoma sposobami, gdy pomiar pośredni jest **niejednoczesny**.

Odpowiedzi dostarcza znowu eksperyment symulacyjny, zrealizowany za pomocą aplikacji Mathcad 14. Eksperyment ten różni się od opisanego w podrozdz. 3

eksperymentu symulującego pomiar pośredni jednoczesny tym, że macierz wartości prądu o elementach $I_{k,m}$ oblicza się ze wzoru:

$$I_{k,m} = U_{k,m+1} \cdot \sqrt{G_{k,m}^2 + B_{k,m}^2} \quad (22)$$

– zamiast ze wzoru (11), tzn. wartość prądu o numerze m uzależnia się od wartości napięcia o numerze $m + 1$. Wartości prądu nie są więc skorelowane z wartościami napięcia.

Podobnie macierz wartości przesunięcia fazowego o elementach $\varphi_{k,m}$ oblicza się ze wzoru:

$$\varphi_{k,m} = \arctg \frac{B_{k,m+1}}{G_{k,m+1}} \quad (23)$$

dzięki czemu przesunięcie fazowe nie jest skorelowane z wartościami konduktancji i susceptancji. Nie są zatem ze sobą skorelowane wartości $I_{k,m}$, $U_{k,m}$ i $\varphi_{k,m}$.

Tu uwaga: Wiarygodność symulacji Monte Carlo zasadza się na założeniu, że generowane liczby pseudolosowe mają nie tylko zadany rozkład prawdopodobieństwa, ale też, że kolejne ich realizacje są od siebie statystycznie niezależne. Według wiedzy autora generatory liczb pseudolosowych aplikacji Mathcad 14 te warunki w wysokim stopniu spełniają.

Wyniki eksperymentu symulacyjnego, dotyczące pomiaru pośredniego niejednoczesnego zestawiono w tablicy 4. Wskazują one na niewielką przewagę sposobu

Tab. 4. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni **niejednoczesny**.

Wartości stałe: $M = 10^5$, $\sigma_G = 0,3 \% \cdot EG$, $\sigma_B = 10 \% \cdot EG$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_e w % dla poziomu ufności $p = 95 \%$
1.	$K = 5, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
2.	Pierwszy (kolumnami)	100,005	0,433	93,6
3.	Drugi (wierszami)	100,007	0,491	96,1
4.	$K = 100, \sigma_U = 0,3 \% \cdot EU$			
5.	Pierwszy (kolumnami)	100,004	0,0876	87,9
6.	Drugi (wierszami)	100,006	0,1103	94,9
7.	$K = 5, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
8.	Pierwszy (kolumnami)	100,21	6,40	95,0
9.	Drugi (wierszami)	101,04	6,52	95,0
10.	$K = 100, \sigma_U = 10 \% \cdot EU$			
11.	Pierwszy (kolumnami)	100,01	1,42	95,1
12.	Drugi (wierszami)	101,04	1,46	90,1

pierwszego (*kolumnami*), szczególnie przy dużej wartości ($\sigma_U = 10\% \cdot EU$) losowego rozrzutu napięcia zasilającego układ pomiarowy – zwłaszcza przy dużej liczbie $K = 100$ obserwacji – wiersz 11 tablicy 4.

Ostatni wniosek skłonił do rozszerzenia badań na jeszcze większe liczby obserwacji: $K = 500$ i $K = 1000$. Ze względu na ograniczone zasoby pamięci, jakimi dysponuje aplikacja Mathcad 14 przy tworzeniu macierzy, liczbę symulowanych pomiarów należało ograniczyć do $M = 10^4$. Wyniki zestawiono w tablicy 5.

Tab. 5. Wyniki eksperymentu MC. Pomiar pośredni **niejednoczesny** o dużej liczbie K obserwacji. Wartości stałe: $M = 10^4$, $\sigma_G = 0,3\% \cdot EG$, $\sigma_B = 10\% \cdot EG$, $\sigma_U = 10\% \cdot EU$

	1.	2.	3.	4.
Nr wiersza	Sposób obliczeń	Estymata w %EG – wartość średnia arytmetyczna z M pomiarów	Odch. empiryczne w %EG – wartość średniokwadratowa z M pomiarów	Prawdopodobieństwo empiryczne P_e w % dla poziomu ufności $p = 95\%$
1.	$K = 500$			
2.	Pierwszy (<i>kolumnami</i>)	100,006	0,637	94,9
3.	Drugi (<i>wierszami</i>)	101,037	0,653	64,9
4.	$K = 1000$			
5.	Pierwszy (<i>kolumnami</i>)	100,005	0,450	95,4
6.	Drugi (<i>wierszami</i>)	101,037	0,462	38,9

Potwierdzają one wcześniejszy wniosek, że **przewaga sposobu pierwszego (*kolumnami*)** objawia się, praktycznie biorąc, **tylko przy dużej liczbie obserwacji**. Wykonywanie liczby obserwacji większej niż kilkadziesiąt nie jest na ogół realne. Praktycznie jest możliwe wtedy, gdy pomiary są automatycznie powtarzane ze znaczną częstotliwością. Taka możliwość występuje w szczególnych przypadkach, ale wtedy zachodzi obawa skorelowania kolejnych wyników i tzw. *efektywna liczba obserwacji* zmniejsza się – patrz rozdział autorstwa A. Zięby.

8. Podsumowanie i wnioski

Inspirację dla podjęcia przedstawionej problematyki stanowiła wiedza pozyskana od metrologów starszej daty, którzy nie dysponując tak potężnym narzędziem, jakim jest symulacja za pomocą komputera, na podstawie swojego doświadczenia i intuicji wskazywali, że pomiar pośredni powinien być jednoczesny i opracowywany *wierszami*. Wśród nich autor pragnie wymienić swoich Nauczycieli: zastępcę profesora mgra inż. Zygmunta Paryskiego i prof. Artura Metala.

Wyniki zaprezentowanych eksperymentów symulacyjnych można wypunktować następująco:

- 1) **Pomiar pośredni jednoczesny** w przedstawionych eksperymentach symulacyjnych wykazał bezwzględną wyższość nad pomiarem pośrednim niejednocze-

snym, zwłaszcza wtedy, gdy obliczenia wykonuje się **spółobem drugim (wierszami)**. Na tę wyższość wskazują wiersze 3, 6, 9 i 12 tablicy 3, z których wynika, że takie połączenie sposobu pomiaru i obliczeń prowadzi do poprawnych, w sensie statystycznym, wartości estymaty mezurandu i wartości niepewności standardowej typu A, jak to szczegółowo omówiono w podrozdziale 6. Z zestawień wartości średniokwadratowych odchyleń empirycznych wg tablicy 3, kolumna 3, a mianowicie wiersza 3 z wierszem 2, w. 6 z w. 5, w. 9 z w. 8 i w. 12 z w. 11 wynika, że w eksperymencie symulacyjnym przy obliczaniu *wierszami* otrzymano ok. 2,5-krotnie mniejsze wartości średniokwadratowe odchylenia empirycznego, niż przy obliczaniu *kolumnami*.

- 2) Konkluzja: **pomiar pośredni jednoczesny jest dokładny w sensie statystycznym, gdy obliczenia wykonuje się sposobem drugim (wierszami)**. Ta dokładność w sensie statystycznym nie oznacza jednak, że w każdym konkretnym pomiarze wartości estymaty mezurandu i odchylenia standardowego są dokładne, bo estymaty mezurandu podlegają statystyce Studenta, a kwadraty odchyleń empirycznych – rozkładowi gamma.
- 3) **Drugi sposób obliczeń (wierszami)** wydaje się w **niewielkim stopniu mniej poprawny przy pomiarze pośrednim niejednoczesnym**, ale ma istotną przewagę nad sposobem pierwszym (*kolumnami*), zwłaszcza przy dużej liczbie zmiennych wejściowych: posługuje się znacznie prostszymi wyrażeniami matematycznymi – np. (15) zamiast (13) i (14) oraz (19) zamiast (16), (17) i (18). Nie wymaga też analizy korelacji między zmiennymi wejściowymi. W efekcie jest mniej podatny na omyłki w obliczeniach – mniej podatny na błędy grube.
- 4) **Pierwszy sposób obliczeń (kolumnami)** wykazuje, pod względem dokładności w sensie statystycznym, niezbyt wielką przewagę nad sposobem drugim (*wierszami*) **przy pomiarze pośrednim niejednoczesnym** – wiersze 8 i 11 tablicy 4 – zwłaszcza **przy dużej** (raczej nierealnej w praktyce) **liczbie obserwacji** – wiersz 11 tablicy 4 i wiersze 2 i 5 tablicy 5.
- 5) **Pomiar pośredni jednoczesny jest znacznie dokładniejszy** od pomiaru pośredniego niejednoczesnego. Wartości średniokwadratowe odchyleń empirycznych w kolumnie 3 tablicy 3 są kilka, a nawet kilkadziesiąt razy mniejsze od odpowiednich wartości w kol. 3 tablicy 4.

Należy jednak też rozróżniać omawiane sposoby obliczeń w aspekcie definicji mezurandu:

- **sposób pierwszy (kolumnami)** daje wartość wyjściową – **funkcję wartości średnich wielkości wejściowych**,
- **sposób drugi (wierszami)** daje **wartość średnią funkcji**.

Mogą to być definicje różnych wielkości. Np. w przypadku pomiaru mocy poprzez pomiar napięcia, prądu i przesunięcia fazowego w pierwszym przypadku jest to moc wartości średnich, a w drugim moc średnia. Są to różne moce, a każda z nich może mieć sens w innym, konkretnym zagadnieniu pomiarowym.

Tak więc trudno jest sformułować jeden uniwersalny i *jedynie słuszny* algorytm obliczeń. Każde zadanie pomiarowe wymaga wnikliwej analizy i tworzenia algorytmu obliczeń, adekwatnego do fizyko-technicznego sensu mierzonej wielkości.

Należy zauważyć, że przedstawione algorytmy obliczeniowe posługują się wartością średnią arytmetyczną jako estymatorem wartości oczekiwanej. Jest to w pełni poprawne, gdy zmienna losowa ma rozkład normalny. Tymczasem zmienna losowa, która jest nieliniową funkcją innych zmiennych losowych nie ma rozkładu normalnego nawet wtedy, gdy te inne zmienne losowe mają rozkłady normalne.

Ponadto należy mieć na uwadze, że pomiar pośredni niejednoczesny można traktować jako złożenie niezależnych pomiarów wielkości wejściowych. Takie podejście wydaje się bardziej ogólne. To jednak wykracza poza zakres tego rozdziału.

9. Podziękowania

Treści tego rozdziału kształtowały się między innymi w dyskusjach podczas konferencji metrologicznych. Dlatego też autor pragnie podziękować szczególnie aktywnym dyskutantom, a zwłaszcza Pani prof. Annie Domańskiej z Politechniki Poznańskiej i Panom prof. prof. Tadeuszowi Skubisowi z Politechniki Śląskiej i Michałowi Lisowskiemu z Politechniki Wrocławskiej za zainteresowanie się prezentowanymi tu zagadnieniami i istotny wkład w treści przedstawione w tym rozdziale. Szczególne podziękowanie należy się prof. A. Domańskiej, która wykonała żmudną pracę wyszukania w [1] i [2] istotnych fragmentów odnoszących się do pomiarów pośrednich.

Znaczący wkład w udoskonalenie rozdziału pod względem terminologicznym ma Pan dr Paweł Fotowicz z Głównego Urzędu Miar.

Autor pragnie wymienić też Pana Macieja Leśniaka, studenta Wydziału Elektrycznego ZUT, który zainteresował się zagadnieniem podczas wykładu i zwrócił uwagę na to, że przy liczbie obserwacji dążącej do nieskończoności wartości średnie wielkości wejściowych (przy niezbędnych założeniach) dążą do wartości prawdziwych. Zainspirowało to autora do realizacji eksperymentu symulacyjnego przy dużej liczbie obserwacji.

Literatura

- [1] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, tłum. Jaworski J. M. Główny Urząd Miar, 1999.
- [2] J. M. Jaworski: *Niedokładność, błąd, niepewność*, dodatek do [1].
- [3] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2004.
- [4] S. Kubisa: *Porządek procedur w pomiarze laboratoryjnym. Metoda Monte Carlo*. Metrologia dziś i jutro, pod red. J. Jakubca, Z. Moronia i H. Juniewicza, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2010, s. 23-38.