

PRZEDZIAŁOWY ZAPIS WYNIKU POJEDYNCZEGO POMIARU

Jerzy Jakubiec
Politechnika Śląska

1. Wstęp

We współczesnych systemach pomiarowych wartości mezurandu obliczane są na podstawie wyników pomiaru próbek sygnału zmiennego w czasie. Zmienność sygnału powoduje, że kolejne próbki mają różne wartości, a zatem każda z próbek może być mierzona tylko jednokrotnie, czyli bez możliwości powtórzenia pomiaru. Niedokładność pomiaru próbek rzutuje na niedokładność algorytmicznego wyznaczania mezurandu, co oznacza, że punktem wyjścia analizy niedokładności mezurandu musi być ocena niedokładności pomiaru pojedynczej próbki.

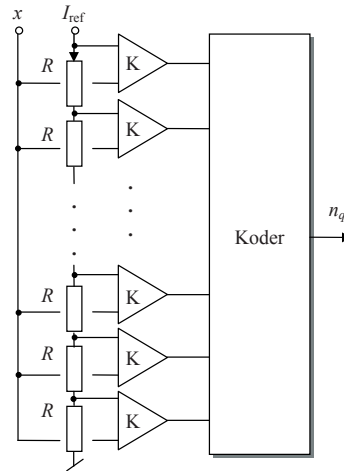
Podstawowym narzędziem do pomiaru próbki sygnału jest przetwornik analogowo-cyfrowy A/C, współpracujący z układem próbkująco-pamiętającym P/P. Zadaniem układu P/P jest pobranie chwilowego przejawu sygnału (wielkości mierzonej), czyli próbki, i pamiętanie wartości tej próbki tak długo, dopóki nie zostanie zmierzona. Pomiaru dokonuje przetwornik A/C na zasadzie kwantowania, czyli przez bezpośrednie porównanie wartości próbki z **wzorcem o strukturze kwantowej** [1]. Tego rodzaju wzorzec składa się kwantów, czyli elementarnych wzorców tego samego rodzaju i o takich samych wartościach, wielokrotnie mniejszych od zakresu przetwornika A/C (kwantyzatora). Wskazanie kwantyzatora jest liczbą, określającą ile kwantów zostało przyporządkowanych wartości wielkości mierzonej, co zarazem oznacza, że wskazanie, ze względu na kwantową (ziarnistą) budowę wzorca, wyodrębnia na osi liczb rzeczywistych przedział o długości jednego kwantu (rys. 2). A zatem, z samej istoty kwantowania wynika, że jego wynik jest przedziałem liczbowym. Dzięki temu analiza procesu kwantowania może stanowić dogodny punkt wyjścia dla rozważań matematycznych, prowadzących do uzyskania opisu wyniku pomiaru w postaci przedziałowej.

2. Pomiar na zasadzie kwantowania

Proces kwantowania może przebiegać różnie w zależności od wielkości kwantowanej, jednak ogólnie można go określić jako składanie wzorca z kwantów w taki sposób, aby suma wartości kwantów nie różniła się od wartości wielkości mierzonej o więcej niż jeden kwant [1]. Analizę procesu kwantowania dogodnie jest przeprowadzić dla tzw. natychmiastowego przetwornika A/C, którego schemat pokazano na rys. 1.

W przetworniku natychmiastowym wykorzystywany jest wzorzec napięciowy, zbudowany przy użyciu łańcucha rezystorów o nominalnie jednakowych wartościach R , połączonych szeregowo i przyłączonych do źródła prądu odniesienia I_{ref}

W przetworniku 8-bitowym wykorzystuje się $N_q = 2^8 = 256$ rezystorów, z których każdy służy do wytworzenia jednego kwantu napięcia. Dzięki szeregowemu połączeniu rezystorów kwanty napięcia sumują się tworząc wzorec wielowartościowy o strukturze kwantowej, dostarczający 256 napięć wzorcowych. Pierwsze z nich ma wartość jednego kwantu równą spadkowi napięcia na pierwszym rezystorze, połączonym z masą układu, a ostatnie napięcie wzorcowe równe jest sumie wszystkich kwantów, czyli jest sumą spadków napięć na wszystkich 256 rezystorach. A zatem, z tak wytworzonych kwantów, można uzyskać 256 wzorców cząstkowych o wartościach od 1 do 256 kwantów. Wszystkie wzorce cząstkowe są dostępne w sposób ciągły, czyli mogą być wykorzystane równocześnie w dowolnej chwili pomiaru. Dzięki temu, oraz użyciu zespołu 256 komparatorów K, porównywanie napięcia mierzonego x z wzorcem o strukturze kwantowej odbywa praktycznie natychmiast, z opóźnieniem zależnym od czasu ustalania się stanu zespołu komparatorów. Na wyjście kodera wyprowadzana jest liczba n_q komparatorów w stanie wysokim H, wskazującym, że napięcie mierzone podawane na jedno z wejść komparatora jest większe od cząstkowego napięcia wzorcowego, przekazywanego na drugie wejście komparatora. Liczba ta określa ile kwantów zostało przyporządkowanych wartości mierzonego napięcia i stanowi wskazanie niemianowane kwantyzatora.

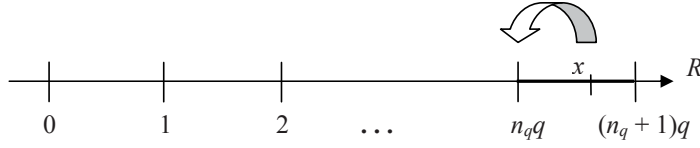


Rys. 1. Schemat natychmiastowego przetwornika A/C

W sensie matematycznym pomiar na zasadzie kwantowania można określić jako odwzorowanie prawdziwej wartości wielkości mierzonej x w przedział składający się z liczb rzeczywistych, co ogólnie można zapisać jako:

$$x \xrightarrow{\text{pomiar}} [\underline{x}, \bar{x}] \quad (1)$$

gdzie $\underline{x}$ jest dolną, a $\bar{x}$ górną granicą przedziału. Granice te można wyznaczyć na podstawie rys. 2, który pokazuje w sposób graficzny właściwości tego rodzaju odwzorowania.



Rys. 2. Ilustracja odwzorowania wielkości mierzonej u w przedział liczbowy określony wskazaniem n_q oraz wartością kwantu q

Zgodnie z rys. 2, przedział reprezentujący wynik kwantowania można zapisać jako:

$$n_q q < x \leq (n_q + 1) q \quad (2)$$

gdzie n_q jest wskazaniem kwantyzatora, a q wartością kwantu. Gdy uwzględni się, że iloczyn:

$$\tilde{x} = n_q q \quad (3)$$

stanowi **wskazanie mianowane kwantyzatora**, wyrażone w jednostkach wielkości mierzonej, to po wprowadzeniu go do nierówności (2), otrzymuje się zależność:

$$\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + q \quad (4)$$

Przyjęto przy tym, że przedział obejmuje również swoją dolną granicę, co z praktycznego punktu widzenia nie jest istotne, a upraszcza rozważania od strony matematycznej.

Z zależności (4) wynika, że dolną granicę rozpatrywanego przedziału opisuje wyrażenie:

$$\underline{x} = \tilde{x} \quad (5)$$

a górną:
$$\bar{x} = \tilde{x} + q \quad (6)$$

Prócz granic przedziału, do jego opisu stosuje się także takie parametry jak środek i promień przedziału. Środek przedziału jest definiowany jako [2]:

$$\text{mid}(x) := \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2} \quad (7)$$

natomiast promień określa wyrażenie:

$$\text{rad}(x) := \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (8)$$

W przypadku przedziału reprezentującego wynik kwantowania, na podstawie równań (5) i (6), uzyskuje się następujące zależności:

$$\text{mid}(x) = \frac{\tilde{x} + q + \tilde{x}}{2} = \tilde{x} + \frac{q}{2} \quad (9)$$

oraz

$$\text{rad}(x) = \frac{\tilde{x} + q - \tilde{x}}{2} = \frac{q}{2} \quad (10)$$

Zgodnie ze wzorem (9) środek przedziału, opisującego wynik kwantowania, używany się w efekcie skorygowania wskazania mianowanego przez dodanie połowy wartości kwantu. Gdy oznaczy się tak wyznaczony środek jako:

$$\hat{x} = \tilde{x} + \frac{q}{2} \quad (11)$$

to po obliczeniu wskazania $\tilde{x}$, na podstawie wyrażenia (11), i wprowadzeniu go do nierówności (2), otrzymuje się:

$$\hat{x} - \frac{q}{2} \leq x \leq \hat{x} + \frac{q}{2} \quad (12)$$

Nierówność (12) można z kolei zapisać w postaci:

$$|x - \hat{x}| \leq \frac{q}{2} \quad (13)$$

która pokazuje, że wartość bezwzględna różnicy wartości prawdziwej i skorygowanego wskazania jest najmniejsza z możliwych do uzyskania w procesie pomiaru dla określonej wartości kwantu. Zatem wskazanie skorygowane, zgodnie z wyrażeniem (11), stanowi najlepsze przybliżenie prawdziwej wartości wielkości kwantowanej i nazywane jest **oceną wartości wielkości mierzonej**.

Gdy weźmie się pod uwagę, że wartość $q/2$ w nierówności (13) stanowi, zgodnie ze wzorem (10), promień przedziału, to można tę nierówność przedstawić jako:

$$|x - \hat{x}| \leq \text{rad}(x) \quad (14)$$

Oznacza ona, że różnica między wartością prawdziwą, a oceną uzyskaną po korekcji wyniku kwantowania jest nie większa niż promień przedziału opisującego wynik pomiaru. Jednak tak jest tylko w przypadku użycia kwantyzatora idealnego, gdy wartości wszystkich kwantów składających się na wzorzec są jednakowe oraz gdy pomija się wszystkie czynniki zaburzające proces kwantowania. Wyrażenie (14) ma wówczas charakter deterministyczny, co oznacza, że prawdziwa wartość wielkości kwantowanej na pewno znajduje się wewnątrz przedziału opisanego tym wyrażeniem. W rzeczywistych warunkach pomiaru, gdy proces kwantowania zaburzany jest czynnikami losowymi, parametry przedziału (14) muszą być opisywane w kategoriach probabilistycznych.

3. Probabilistyczny opis wyniku kwantowania w postaci przedziału

W warunkach gdy sygnał próbkowany zaburzony jest szumem lub występują czynniki konstrukcyjne, których wpływ na proces kwantowania opisywany jest probabilistycznie [1], nierówność (14) jest spełniona tylko z pewnym prawdopodobieństwem

stwem, oznaczanym jako p . Z reguły wartość p zakłada się na tyle dużą, aby przedział, reprezentujący wynik pomiaru, stanowił zbiór liczb taki, aby znalezienie w nim wartości prawdziwej było „prawie pewne”. W praktyce przyjmuje się na ogół $p = 0,95$ [3], co można interpretować przykładowo w taki sposób, że na 100 wyznaczonych przedziałów 95 z nich obejmie prawdziwą wartość wielkości mierzonej.

Punktem wyjścia do określenia środków matematycznych, pozwalających na obliczenie parametrów przedziału reprezentującego wynik pomiaru uzyskany w warunkach opisywanych probabilistycznie, może być nierówność (14). Gdy zapisze się ją w sposób scharakteryzowany powyżej, uzyskuje się wyrażenie:

$$\mathbf{P}[|x - \hat{x}| \leq \text{rad}(x)] = p \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{P}$ oznacza prawdopodobieństwo. Zgodnie z tym wyrażeniem poszukiwany jest promień $\text{rad}(x)$ przedziału o środku równym ocenie $\hat{x}$, taki że prawdopodobieństwo znalezienia w tym przedziale prawdziwej wartości wielkości mierzonej wynosi p .

Od pewnego czasu w metrologii stosowana jest definicja, zgodnie z którą promień przedziału, reprezentującego wynik pomiaru opisywany probabilistycznie, nazywany jest **niepewnością**, oznaczaną symbolem U [3]. Przyjmując zatem, że:

$$U \equiv \text{rad}(x) \quad (16)$$

zależność (15) można zapisać w postaci wyrażenia:

$$\mathbf{P}[|x - \hat{x}| \leq U] = p \quad (17)$$

Wyznaczenie wartości U , na podstawie zależności (17), wymaga znajomości probabilistycznego opisu różnicy prawdziwej wartości wielkości mierzonej x i oceny tej wartości $\hat{x}$. Różnica ta może być zdefiniowana jako **błąd oceny** [4]:

$$e \equiv x - \hat{x} \quad (18)$$

Wartość oceny $\hat{x}$ jest znana (uzyskiwana jest w efekcie kwantowania), natomiast wartość prawdziwa x nie jest znana. Oznacza to, że w warunkach pomiarowych realizacje błędu e nie mogą być określone, a więc można jedynie opisywać zbiory wartości tego błędu, wyznaczając ich rozkłady. Oczywiście realizacje (wartości) tego błędu mogą być uzyskiwane na drodze symulacji, gdyż wówczas zakłada się znajomość wartości wielkości mierzonej. Stwarza to możliwość stosowania metody Monte Carlo do uzyskiwania rozkładów błędu oceny.

Właściwości błędu oceny są na tyle specyficzne, że wymagają komentarza. Przede wszystkim należy zauważyć, że definicja (18) jest efektem analizy procesu kwantowania, a więc nie jest to definicja umowna, lecz uzyskana na drodze dedukcji. Punktem odniesienia w tej definicji jest ocena $\hat{x}$, będąca najlepszym przybliżeniem wartości wielkości mierzonej, w przypadku gdy pomiar realizowany jest jednorazowo. Jest to zarazem jedyna liczba uzyskiwana podczas pomiaru, a zatem to ona musi stanowić przedmiot analizy niedokładności pomiaru, której podstawą jest definicja błędu. Z przedstawionych rozważań wynika także, że ocena ta stanowi środek przedziału reprezentującego wynik pomiaru, czyli jest centralnym punktem, wokół którego bu-

duje się przedział, obejmujący z zadaniem prawdopodobieństwem prawdziwą wartość wielkości mierzonej.

Użycie oceny jako podstawy definiowania błędu powoduje, że taki błąd może być rozpatrywany dopiero po zakończeniu pomiaru, gdyż wymaga znajomości wartości tej oceny. Błąd taki można nazwać **błędem a posteriori**, w przeciwieństwie do błędu, który definiuje się w odniesieniu do prawdziwej wartości wielkości mierzonej, którą przyjmuje się jako znaną. Ta druga definicja, powszechnie stosowana w metrologii [5], może być wykorzystywana do analizy procesu pomiaru przed jego rozpoczęciem, a tak określony błąd można nazwać **a priori**. Obydwie definicje mogą być używane równocześnie, należy jedynie pamiętać, że chociaż odpowiadające sobie realizacje obu wymienionych rodzajów błędu nie różnią się co do wartości bezwzględnych, to mają przeciwne znaki [1].

W dotychczasowych rozważaniach ocena była uzyskiwana przez skorygowanie wskazania mianowanego kwantyzatora o wartość połowy kwantu. Gdy przyjmie się, że ocena jest najlepszym przybliżeniem wartości wielkości mierzonej w sensie zgodności z kryteriami probabilistycznymi, to punktem wyjścia do wyznaczenia wartości oceny musi być losowy opis błędu tej oceny (sama ocena jest liczbą). Prawdziwa wartość wielkości mierzonej jest najlepiej przybliżona przez jej ocenę, gdy z błędu usunie się składową systematyczną. Wartość oczekiwana błędu oceny jest wówczas równa zeru, czyli zachodzi:

$$E[e] = \int_{-\infty}^{\infty} e g(e) de = 0 \quad (19)$$

gdzie $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu oceny (18).

Wprowadzenie definicji błędu oceny oraz przyjęcie zależności (16) pozwala na zapis wyrażenia (15), określającego niepewność, w następującej postaci:

$$P[|e| \leq U] = p \quad (20)$$

która oznacza, że niepewność jest definiowana jako promień przedziału, takiego że wartości, które przyjmuje błąd oceny mieszczą się w tym przedziale z zadaniem prawdopodobieństwem p . Oznacza to, że niepewność jest definiowana jako **parametr zbioru wartości błędu oceny**.

Dla znanego rozkładu błędu wyrażenie (20) można zapisać w postaci funkcjonału:

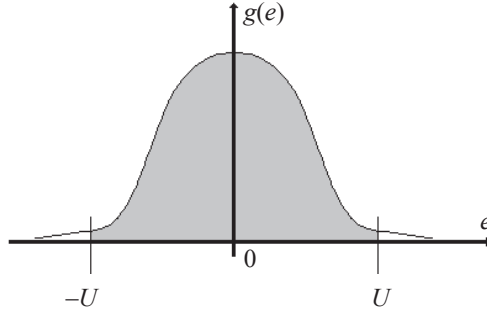
$$\frac{1}{F} \int_{-U}^U g(e) de = p \quad (21)$$

gdzie $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa błędu lub jej przybliżeniem danym w postaci histogramu. Gdy weźmie się pod uwagę, że zgodnie ze wyrażeniem (19) wartość oczekiwana jest równa zeru, to $g(e)$ musi być symetryczna względem osi pionowej. Współczynnik F ma charakter normalizujący i występuje we wzorze (21) ze względu na różne sposoby opisu rozkładu błędu. Ma on postać:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} g(e) de \quad (22)$$

Gdy $g(e)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa to $F = 1$, natomiast w przypadku gdy rozkład dany jest histogramem licznosci (słupki histogramu określają wówczas liczbę wystąpień błędu) zachodzi $F > 1$.

Graficzną interpretację wyznaczania niepewności U , zgodnie z funkcjonalem (21), przedstawiono na rys. 3. Kolorem szarym zaznaczono fragment pola powierzchni funkcji podcałkowej, którego stosunek do całkowitej powierzchni pola tej funkcji wynosi p .



Rys. 3. Graficzna interpretacja niepewności oceny wartości wielkości mierzonej

Znajomość niepewności pozwala na wyznaczenie granic przedziału reprezentującego wynik pomiaru. Zgodnie z zależnościami (7) i (8) dolną granicę przedziału opisuje wzór:

$$\underline{x} = \text{mid}(x) - \text{rad}(x) \quad (23)$$

a granicę górną:

$$\bar{x} = \text{mid}(x) + \text{rad}(x) \quad (24)$$

Środek przedziału równy jest ocenie wartości wielkości mierzonej, a promień – niepewności. Zatem wynik kwantowania w postaci przedziałowej można zapisać jako:

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = [\hat{x} - U, \hat{x} + U] \quad (25)$$

Jest także druga, bardzo użyteczna postać przedziałowego zapisu wyniku pomiaru, którą można otrzymać po przekształceniu wyrażenia (25). Zgodnie z regułami arytmetyki przedziałowej [2], przedział liczbowy można zapisać jako sumę jego środka i przedziału o granicach określonych jedynie przez promień, czyli takiego przedziału, którego środek jest równy zeru. Gdy zastosuje się tę regułę w odniesieniu do przedziału reprezentującego wynik pomiaru, uzyska się zapis w postaci:

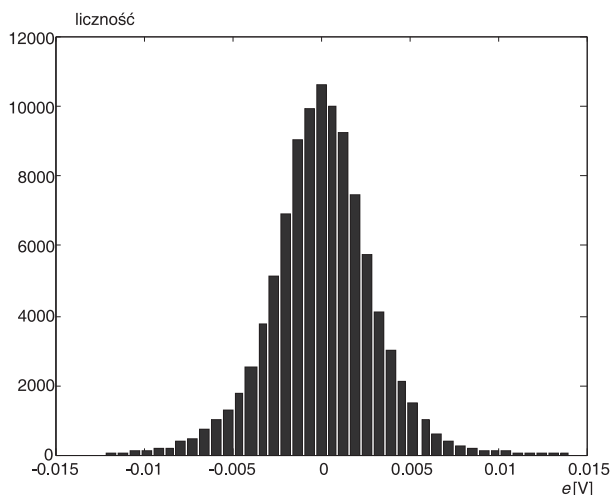
$$x = \text{mid}(x) + [-\text{rad}(x), \text{rad}(x)] = \hat{x} + [-U, U] \quad (26)$$

Zapis ten można interpretować w ten sposób, że wynik pomiaru jest sumą oceny oraz przedziału o granicach wyznaczonych przez niepewność, który w związku z tym może być nazywany **przedziałem niepewności**.

Postać (26) wyniku jest użyteczna wówczas, gdy analizuje się metrologiczne właściwości algorytmu przetwarzającego ciąg wyników pomiaru próbek sygnału. Można wówczas oddzielnie rozpatrywać działania na ciągu ocen wartości chwilowych sygnału i oddzielnie na niepewnościach tych ocen lub odpowiadających im przedziałach niepewności [1]. W końcowej fazie tych operacji następuje zsumowanie oceny i przedziału niepewności, zgodnie z zależnością (26), co prowadzi do uzyskania przedziałowego zapisu wyniku przetwarzania.

Przykład

Założmy, że należy obliczyć niepewność pojedynczego wyniku pomiaru wykonanego 8-bitowym przetwornikiem A/C o zakresie od 0 do 1,024 V. Niech na błąd całkowity tego przetwornika składają się błąd kwantowania oraz błąd spowodowany rozrzutem wartości kwantów [1]. Na rys. 4 pokazano histogram błędu całkowitego, uzyskany metodą Monte Carlo dla populacji liczącej 500 tego rodzaju przetworników A/C. Wszystkie przetworniki mają wzorzec zbudowany z 256 kwantów, przy czym każdy kwant charakteryzuje się rozrzutem o rozkładzie jednostajnym w granicach od -10 do 10 % wartości nominalnej.



Rys. 4. Rozkład błędu całkowitego przykładowego przetwornika A/C

Za pomocą każdego z przetworników wykonano 200 pomiarów dla losowo wybranych wartości napięcia, zmieniających się zgodnie z rozkładem jednostajnym w zakresie pomiarowym przetwornika, po czym wyznaczono błąd pomiaru. Uzyskano zbiór wartości błędu o licznosci 100 000, który zestawiono w histogram składający się ze 100 słupków, pokazany na rys. 4. Używając tego histogramu wyznaczono następnie niepewność zgodnie z zależnością (21) dla $p = 0,95$. Obliczenia wykonano sumując licznosc słupków zaczynając od zerowej wartości błędu i kończąc, gdy uzyskana suma przekroczyła wartość wynoszącą $0,95 \cdot 100\,000$. Połowę różnicy błędu dodatniego i ujemnego po zakończeniu sumowania przyjęto jako wartość niepew-

ności opisującej uzyskany zbiór wartości błędu. Obliczona w ten sposób wartość niepewności wyniosła $U = 4,2 \cdot 10^{-3}$ V.

Przyjmijmy teraz, że wykonano pojedynczy pomiar przetwornikiem A/C należącym do opisanej populacji i uzyskano wskazanie $n_q = 245$. Po wykonaniu korekcji składowej systematycznej wyniku kwantowania (a tym samym i błędu [1]), zgodnie z zależnością (11), uzyskuje się ocenę wartości wyniku pomiaru o wartości:

$$\hat{x} = \bar{x} + \frac{q}{2} = \left(n_q + \frac{1}{2} \right) q = (245 + 0,5) \frac{1,024}{2^8} \text{ V} = 982 \text{ mV}$$

Znajomość oceny i niepewności pozwala na wyznaczenie przedziału reprezentującego wyniku pomiaru. Na podstawie zależności (25) granice przedziału wynoszą:

$$\underline{x} = \hat{x} - U = 982 - 4,2 = 977,8 \text{ mV}$$

oraz

$$\bar{x} = \hat{x} + U = 982 + 4,2 = 986,2 \text{ mV}$$

Zatem wynik pomiaru opisuje w tym przypadku przedział:

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = [977,8, 986,2] \text{ mV}$$

W systemach pomiarowych, wykorzystujących przetworniki nieliniowe pojawiają się błędy o rozkładach niesymetrycznych względem osi rzędnych [1]. Błędy te mogą istotnie wpływać na proces kwantowania i wówczas powstaje problem, jak zapisać wynik w postaci przedziałowej. W tym celu można zmienić wyrażenie (20) w taki sposób, aby opisywało również sytuację, gdy przedział niepewności jest niesymetryczny względem wartości 0, czyli jego granice mają różne wartości bezwzględne. Gdy oznaczy się dolną granicę przedziału niepewności jako $\underline{U}$, a jego górną granicę jako $\bar{U}$, wyrażenie (20) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{P}[\underline{U} \leq e \leq \bar{U}] = p \quad (27)$$

Oczywiście, w przypadku gdy przedział niepewności jest symetryczny, czyli zachodzi $\underline{U} = -U$ oraz $\bar{U} = U$, zależność (27) przyjmuje postać (20).

Dla znanego rozkładu błędu e , wyrażenie (27) można zapisać w postaci funkcjonału:

$$\frac{1}{F} \int_{\underline{U}}^{\bar{U}} g(e) de = p \quad (28)$$

w którym F ma takie samo znaczenie jak w (27) i opisane jest zależnością (22). W funkcjonale tym występują dwie zmienne $\underline{U}$ oraz $\bar{U}$, a zatem aby mógł on posłużyć do wyznaczenia ich wartości należy rozdzielić wyrażenie (28) na dwie części, takie że w każdym z nich występuje odpowiednio tylko jedna granica przedziału. Gdy weźmie się pod uwagę, że wartość oczekiwana rozkładu błędu jest równa zeru, granica podziału powinna przebiegać przez oś rzędnych. W takim przypadku funkcjonał (28) może być zapisany w postaci:

$$\int_{\underline{U}}^0 g(e) de + \int_0^{\bar{U}} g(e) de = p(F_1 + F_2) \quad (29)$$

gdzie: $F_1 = \int_{-\infty}^0 g(e) de$ i $F_2 = \int_0^{\infty} g(e) de$

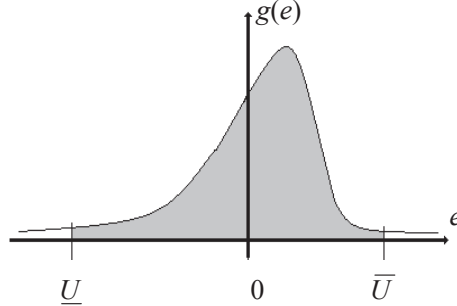
Po rozdzieleniu odpowiadających sobie wyrażeń całkowych, na podstawie wyrażenia (29), otrzymuje się dwie zależności. Pierwsza:

$$\frac{1}{F_1} \int_{\underline{U}}^0 g(e) de = p \quad (30)$$

pozwała na obliczenie parametru $\underline{U}$, określającego dolną granicę przedziału niepewności, podczas gdy druga zależność:

$$\frac{1}{F_2} \int_0^{\bar{U}} g(e) de = p \quad (31)$$

służy do uzyskania wartości górnej granicy $\bar{U}$. Graficzną interpretację granic niesymetrycznego przedziału niepewności przedstawiono na rys. 5. Sposób zapisu wyniku pomiaru jest w tym przypadku taki sam, jak dla przedziału symetrycznego, jednak pojęcie niepewności traci sens. Można co prawda wyznaczać średnią z granic tego przedziału, jednak nadawanie jej sensu niepewności nie wydaje się celowe.



Rys. 5. Graficzna interpretacja granic niesymetrycznego przedziału niepewności

4. Niepewność średniej z serii pomiarowej

Wynikiem pojedynczego pomiaru jest ocena wartości wielkości mierzonej. Ocena ta jest obciążona błędami losowymi, w związku z czym wyznaczenie średniej dla ciągu ocen tej samej wartości wielkości mierzonej prowadzi do uzyskania lepszego przybliżenia jej prawdziwej wartości. Działanie to można zapisać w postaci:

$$\hat{x}_{sr} = \frac{1}{N} [\hat{x}(1) + \hat{x}(2) + \dots + \hat{x}(N)] \quad (32)$$

gdzie N jest liczbą wyrazów w ciągu.

Każda z ocen ciągu poddawanego uśrednieniu uzyskana jest w takich samych warunkach pomiarowych, a zatem obciążona jest błędem e o takim samym rozkładzie. W związku z tym błąd średniej (32) można zapisać jako:

$$e_{sr} = \frac{1}{N} [e(1) + e(2) + \dots + e(N)] \quad (33)$$

Niepewność średniej można uzyskać obliczając niepewność pojedynczej oceny i wykonując działania na odpowiednim zbiorze przedziałów niepewności, odpowiednich dla wyrażenia (33) [6]. Jest to jednak działanie dość złożone i w przypadku średniej można uzyskać niepewność wypadkową w prostszy sposób, wykorzystując w tym celu centralne twierdzenie graniczne [5]. Zgodnie z nim, gdy sumuje się niezależne błędy o takich samych rozkładach, rozkład błędu wypadkowego dąży do rozkładu normalnego. Dla procesu kwantowania, w celach praktycznych już od $N = 4$, można uznać rozkład błędu wypadkowego jako normalny. Wówczas, niezależnie od rozkładu błędu oceny, dla średniej z serii zachodzi:

$$\sigma_{sr}^2 = \frac{1}{N^2} [\sigma^2(1) + \sigma^2(2) + \dots + \sigma^2(N)] = \frac{1}{N} \sigma^2 \quad (34)$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym. Gdy uwzględnimy, że dla rozkładu normalnego niepewność dla $p = 0,95$ jest dwukrotnie większa niż odchylenie standardowe [3], zachodzi:

$$U = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} \quad (35)$$

5. Podsumowanie

Przedstawiony wywód matematyczny prowadzi do uzyskania opisu pojedynczego wyniku pomiaru w postaci przedziału liczbowego, którego środkiem jest ocena wyniku, a promieniem niepewność. Postawą tego wywodu jest analiza procesu kwantowania, jednak uzyskane zależności matematyczne można wykorzystać dla każdego wyniku pomiaru bezpośredniego. Można to uzasadnić dwoma podstawowymi argumentami. Po pierwsze, wszystkie wzorce mają strukturę ziarnistą, którą narzuca ich konstruktor, a gdy tak nie jest, to ujawnia się ona na poziomie kwantowym. Po drugie, nawet wtedy, gdy traktuje się wzorzec jak ciągły, to ograniczona rozdzielczość pomiaru powoduje, że opis wyniku jego wyniku ma cechy ziarnistości.

Zależności, opisane w końcowym fragmencie pracy, pozwalają na stwierdzenie, że opis pojedynczego wyniku pomiaru powinien być fundamentem budowania opisu mezurandu, traktowanego jako rezultat przetworzenia ciągu danych pomiarowych za pomocą stosownego algorytmu [1]. Przykładem takiego algorytmu może być opisane tu uśrednianie ciągu wyników. Niepewność mezurandu, w tym przypadku średniej, może być wyznaczona na podstawie znajomości błędów pojedynczych wyników, składających się na ciąg przetwarzanych danych pomiarowych.

Bibliografia

- [1] J. Jakubiec: *Błędy i niepewności danych w systemie pomiarowo-sterującym*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- [2] A. Neumaier: *Interval Methods for System of Equations*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [3] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*. Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
- [4] J. Jakubiec: *System Oriented Mathematical Model of Single Measurement Result*. *Metrology and Measurement Systems*, vol. XIII (2002), nr 4, s. 406-419.
- [5] T. Skubis: *Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
- [6] J. Jakubiec: *Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych pomiarowych*. Monografia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.