

WSPÓŁCZESNE PODEJŚCIE W DZIEDZINIE WYRAŻANIA NIEPEWNOŚCI POMIARU

Paweł Fotowicz
Główny Urząd Miar

1. Wstęp

We współczesnej metrologii zmienia się podejście w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Tradycyjna ocena, w postaci statystycznej analizy wyników obserwacji, zastępowana jest probabilistyczną oceną źródeł niepewności związanych z pomiarem wielkości mierzonej.

Koncepcję probabilistycznego opracowania wyniku pomiaru promuje międzynarodowy dokument [1], wydany w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia przez siedem najważniejszych organizacji metrologicznych. Koncepcja zakłada jednakowe traktowanie, przy opracowaniu wyniku pomiaru, informacji pochodzących z różnych źródeł, szczególnie tych które wywodzą się spoza samego pomiaru, a uzyskanych na podstawie wiarygodnych analiz związanych z opisem procesu pomiarowego. Informacje te zapisywane są w postaci zmiennych losowych, a dalsze ich przetwarzanie odbywa się zgodnie z regułami rachunku probabilistycznego. Podejście to znajduje potwierdzenie w innych opracowaniach [2 ÷ 9] wiodących instytucji w dziedzinie metrologii. W literaturze międzynarodowej szczególne miejsce znajduje w książkach naukowych poświęconych zagadnieniom niepewności pomiaru [10 ÷ 26].

Obecnie opracowywany jest pakiet dokumentów wyznaczający nowy standard w dziedzinie opracowania danych pomiarowych. Pakiet ten firmowany jest przez Międzynarodowe Biuro Miar.

2. Dokumenty przygotowywane pod egidą Międzynarodowego Biura Miar

W 1997 roku pod egidą Międzynarodowego Biura Miar (BIPM) został powołany Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM – *Joint Committee for Guides in Metrology*), którego zadaniem jest opracowanie nowych zasad wyrażania niepewności pomiaru i związanej z nimi terminologii. Prace Komitetu toczą się w dwóch grupach roboczych. Pierwsza z nich zajmuje się bezpośrednio zagadnieniami związanymi z niepewnością pomiaru, a druga z problematyką terminologiczną. Owocem działania pierwszej grupy jest zestaw trzech dokumentów [27, 28, 29], a owocem pracy drugiej grupy międzynarodowy słownik terminologiczny [30]. Znakiem rozpoznawczym prac pierwszego zespołu jest akronim GUM (*Guide Uncertainty Measurement*), a drugiego akronim VIM (*Vocabulary International Metrology*). Należy dodać, że dokument [28] jest elektroniczną wersją Przewodnika wyrażania niepewności pomiaru, wydrukowanego pierwotnie w 1993 roku. Obecnie trwają

prace nad kolejnymi dokumentami powyższego pakietu, które będą sukcesywnie upubliczniane w postaci wersji elektronicznych, dostępnych na stronie internetowej BIPM.

Pełny pakiet dokumentów tworzy zbiór dziewięciu opracowań:

- 1) Guide to the expression of uncertainty in measurement. GUM 1995 with minor corrections. JCGM 100:2008;
- 2) Supplement 1 to the Guide – propagation of distribution using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008;
- 3) Supplement 2 to the Guide – extension to any number of output quantities. JCGM 102;
- 4) Supplement 3 to the Guide – modelling. JCGM 103;
- 5) An introduction to the Guide and related documents. JCGM 104:2009;
- 6) Concepts, principles and methods for the assessment of measurement uncertainty. JCGM 105;
- 7) The role of measurement uncertainty in conformity assessment. JCGM 106;
- 8) Applications of the least-squares method;
- 9) Bayesian methods.

Poniżej skrótoowo przedstawiono zawartość tych materiałów.

„Supplement 1 to the Guide – Propagation of distributions using a Monte Carlo method” (JCGM 101:2008) – dokument zawiera kluczowe wytyczne co do nowego podejścia w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru, wraz z odpowiednią terminologią i zbiorem pojęć. Podstawową jego ideą jest zasada propagacji rozkładów realizowana poprzez model matematyczny pomiaru przy użyciu symulacji Monte Carlo. Miarą wyniku pomiaru jest rozkład prawdopodobieństwa związany z wielkością wyjściową, wyznaczany na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Wynik pomiaru przedstawiany jest w postaci parametrów tego rozkładu: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i kwantyli rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa, jako granic przedziału rozszerzenia. Dokument przedstawia zalecaną procedurę Monte Carlo, umożliwiającą obliczanie wszystkich powyższych parametrów. Wielkość mierzona scharakteryzowana jest przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Jej wartość oczekiwana traktowana jest jak najlepsza estymata wielkości mierzonej, a odchylenie standardowe jako niepewność standardowa związana z tą estymatą. Materiał również omawia algorytm postępowania z uwzględnieniem liczby próbkowań, umożliwiającej osiągnięcie założonej dokładności obliczeniowej przedziału rozszerzenia dla wielkości mierzonej. Przyjmuje dwie koncepcje przedziału rozszerzenia, symetrycznego probabilistycznie i najkrótszego, dla założonego prawdopodobieństwa. Ten drugi może być asymetryczny względem wartości oczekiwanej rozkładu związanego z wielkością mierzoną. Opracowanie powyższe przedstawia też przykłady obliczeniowe i procedurę walidacyjną wyznaczania niepewności pomiaru metodami analitycznymi przy użyciu symulacji Monte Carlo.

„Supplement 2 to the Guide – Extension to any number of output quantities” (JCGM 102) – dokument rozszerza problematykę obliczania niepewności pomiaru na modele, w którym występuje więcej niż jedna wielkość wyjściowa. Przedstawia ją jako wielkość wektorową, w postaci macierzowej. Opisuje symulacje Monte Carlo dla

modeli wielowymiarowych, w celu wyznaczenia dla nich odpowiedniego wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa. Na jego podstawie można wyznaczyć odpowiednik przedziału rozszerzenia, jak dla wielkości jednowymiarowych, w postaci obszaru rozszerzenia. Obszar ten w ogólnym przypadku powinien być najmniejszym dla określonego prawdopodobieństwa. W przypadku wielowymiarowej funkcji Gaussa, jako rozkładu wielkości wyjściowej, przybiera postać hiper-elipsoidy, a w innych przypadkach może przyjmować postać hiper-prostokąta. Materiał zilustrowany jest kilkoma przykładami obliczeniowymi.

„Supplement 3 to the Guide – Modelling” (JCGM 103) – dokument dotyczy trzech głównych zagadnień: tworzenia modelu pomiaru, klasyfikacji modeli oraz ich obliczeń. Pierwsze z zagadnień omawia jak, przy znajomości zjawisk fizycznych i praktyki pomiarowej, powiązać wielkości wejściowe z wielkościami wyjściowymi. Uwzględnia się tu oddziaływanie wielkości wpływających na wynik pomiaru. Mogą być nimi zarówno oddziaływania przypadkowe jak i systematyczne. Klasyfikacja modeli dotyczy matematycznego opisu pomiaru bezpośredniego i pośredniego wielkości jedno i wielowymiarowej, w tym wektorowych. Obliczenia natomiast związane są z wyznaczaniem estymat powyższych wielkości i powiązanych z nimi niepewności z uwzględnieniem ich korelacji.

„The role of measurement uncertainty in conformity assessment” (JCGM 106) – dokument dotyczy oceny zgodności wielkości mierzonej z określonymi wymaganiami. Wymagania wyznaczają granice zgodności w postaci przedziału dla zbioru możliwych wartości wielkości mierzonej. Przedział ten powinien obejmować wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe rozkładu związanego z wielkością mierzoną. Ponieważ wiedza o wielkości mierzonej nigdy nie jest kompletna, zawsze istnieje określone ryzyko oceny zgodności. Materiał przedstawia problematykę obliczania prawdopodobieństwa zgodności w kontekście błędów wyznaczania granic zgodności i strefy akceptacji. Rozważa przypadek przedziału dwustronnego z określonymi górną i dolną granicą oraz przypadek przedziału jednostronnego z określoną tylko górną granicą i zerową dolną wartością graniczną.

„Applications of the least-squares method” – dokument dotyczy zagadnienia wykorzystania metody najmniejszych kwadratów przy wzorcowaniu i adiustowaniu. Metoda umożliwia wyznaczenie funkcji określającej relację pomiędzy wartością zadawaną wielkości mierzonej, a wartością odpowiedzi wzorowanego lub adiustowanego urządzenia pomiarowego. Jej wynikiem jest określenie parametrów adjustacji lub dopasowanie krzywej kalibracji. W procesie kalibracji typowymi wielkościami zadawanymi są wartości certyfikowanych wzorców odniesienia. Dopasowanie powinno uwzględniać fakt niepewności pomiarowych związanych z tymi wartościami. Może mieć postać liniowej lub nieliniowej krzywej kalibracji, przy wyznaczaniu której uwzględnia się wiedzę na temat zjawisk fizycznych związanych z wykonywanym pomiarem.

Powyższe dokumenty wyznaczają podstawowy kanon opracowania danych pomiarowych, w myśl kształtującej się współcześnie koncepcji metrologicznej i dlatego noszą wspólny tytuł „Evaluation of measurement data”. Celem ich jest bowiem wypracowanie wspólnej metodyki opracowania wyniku pomiaru, jednolitej dla całego obszaru zastosowań metrologicznych.

3. Zagadnienia terminologiczne związane z wyrażaniem niepewności pomiaru

Obok metodologii związanej z wyrażaniem i obliczaniem niepewności pomiaru kształtuje się terminologia z nią związana. Świadczy o tym fakt, że w nowym słowniku metrologicznym, już trzeciej edycji VIM (International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms), znalazło się aż kilkanaście zdefiniowanych terminów dotyczących niepewności pomiaru, a wśród nich takie jak: niepewność definicyjna, niepewność docelowa, niepewność przyrządowa, niepewność rozszerzona, niepewność standardowa czy przedział rozszerzenia.

We wstępie do tego dzieła autorzy podkreślają dwa podejścia, jedno związane z tradycyjną koncepcją opartą na statystycznej analizie błędu pomiaru (Error Approach, Traditional Approach lub True Value Approach), drugie związane z teorią niepewności opartą na probabilistycznej metodzie propagacji rozkładów (Uncertainty Approach).

Oba podejścia przyjmują założenie o wyznaczaniu niepewności pomiaru na podstawie rozkładu związanego z wynikiem pomiaru, lecz w pierwszym jest to rozkład o charakterze statystycznym, a w drugim o charakterze probabilistycznym. Różnica pomiędzy tymi rozkładami polega na tym, iż w przypadku rozkładu statystycznego parametry jego są zmiennymi losowymi, a w przypadku rozkładu probabilistycznego parametry jego są liczbami stałymi. W pierwszym wypadku mamy do czynienia z zagadnieniem zmienności tych parametrów, w drugim przypadku taka sytuacja jest wyeliminowana, ponieważ wyznaczone parametry pozbawione są wewnętrznej niepewności. Aby odróżniać oba podejścia zaproponowano zróżnicowanie terminologiczne dotyczące wyrażania niepewności w obu sytuacjach. Szczególnie dotyczy to takich pojęć jak: *przedział ufności* (*confidence interval*) i *przedział rozszerzenia* (*coverage interval*) oraz *poziom ufności* (*confidence level*) i *prawdopodobieństwo rozszerzenia* (*coverage probability*). Terminy *przedział ufności* i *poziom ufności* związane są z rozkładem statystycznym (otrzymanym na podstawie serii obserwacji), a pojęcia: *przedział rozszerzenia* i *prawdopodobieństwo rozszerzenia* z rozkładem probabilistycznym (otrzymywanym metodą propagacji rozkładów wielkości wejściowych poprzez model matematyczny pomiaru wielkości wyjściowej). O ile pojęcia związane z rozkładem statystycznym (zmiennej losowej związanej z ograniczoną liczebnie serią obserwacji) są dobrze znane w krajowej literaturze naukowej, o tyle pojęcia związane z rozkładem probabilistycznym (zmiennej losowej ciągłej lub dyskretnej związanej z populacją) są nowymi pojęciami. Językowo nawiązują do terminu *współczynnik rozszerzenia* (*coverage factor*), z założeniem translacyjnym, że w tym kontekście słowo *coverage* można tłumaczyć jako *rozszerzenie*. Należy dodać, że pojęcia *przedział rozszerzenia* i *prawdopodobieństwo rozszerzenia*, jak i wiele innych, wprowadza do krajowej praktyki terminologicznej norma polska PKN-ISO/IEC Guide 99 [31], wydana w kwietniu 2010 roku.

W pierwszym podejściu (Error Approach lub True Value Approach) zakłada się istnienie hipotetycznej, pojedynczej, lecz niepoznawalnej wartości prawdziwej związanej z wielkością mierzoną. Celem analizy jest wyznaczenie przedziału ufności

zawierającego z określonym prawdopodobieństwem tą hipotetyczną wartość. Przedział buduje się wokół wartości średniej otrzymanej na podstawie serii obserwacji. Zakłada się przy tym, że wszystkie obserwacje wywodzą się z populacji o rozkładzie normalnym.

Drugie podejście (Uncertainty Approach) nie przyjmuje założenia o istnieniu hipotetycznej, pojedynczej wartości prawdziwej, ale traktuje każdą wartość, którą można przypisać wielkości mierzonej jako jej wartość prawdziwą. W związku z powyższym każdej wielkości można przypisać określony zbiór możliwych wartości. Zbiór taki można wyznaczyć i przedstawić w postaci rozkładu prawdopodobieństwa. Obliczenia wykonuje się metodą propagacji rozkładów przypisanych wielkościom wejściowym poprzez model matematyczny wielkości wyjściowej. Propagację można realizować metodą Monte Carlo, a w przypadku modeli linowych (na ogół dla pomiarów bezpośrednich lub pośrednich linearyzowanych) również przy użyciu operacji splotu matematycznego. Miarą niepewności pomiaru jest długość przedziału rozszerzenia rozkładu wyjściowego obliczana dla określonego prawdopodobieństwa rozszerzenia, na ogół równego 95 %.

4. Historyczne źródła niepewności pomiaru

Można postawić pytanie, gdzie należałoby szukać początków kształtowania się współczesnej myśli w dziedzinie opracowania danych pomiarowych. Początki te historycznie można wiązać z trzema intelektualnymi osiągnięciami myśli matematycznej. Wszystkie pojawiły się prawie w tym samym czasie za sprawą trzech wybitnych intelektualistów z przełomu XVIII i XIX wieku.

Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) i Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), za sprawą swoich publikacji, stworzyli podstawy współczesnej metodyki opracowania danych pomiarowych. Przedstawili w nich trzy podstawowe rozwiązania, które współcześnie znane są pod nazwami: metoda najmniejszych kwadratów, prawo propagacji błędów oraz centralne twierdzenie graniczne. Przedstawione zostały, nijako na marginesie zasadniczych publikacji, kolejno w latach 1805, 1809 i 1810. Prace nie tworzą oddzielnych dzieł, lecz raczej są uzupełnieniami szerszych opracowań.

Legendre w dziele pt. „Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes”, które ukazało się w 1805 roku zamieszcza kilkunastonicowy dodatek „Sur la methode des moindres quarrres”. Przedstawia w nim metodę minimalizacji sumy kwadratów błędów. Jeżeli przedstawimy równie wielkości mierzonej w postaci liniowej to możemy zapisać szereg równań błędów tej wielkości:

$$E_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + \dots \quad (1)$$

gdzie $a_i, b_i, c_i, \dots$ są znanymi współczynnikami, a $x, y, z, \dots$ nieznanymi wielkościami wejściowymi. Zmienne równania można wyznaczyć podnosząc do kwadratu błędy i sumując je tak, aby wyznaczały najmniejszą z możliwych wartości. Współcześnie metoda ta stosowana jest w analizie regresji.

Kolejne rozwiązanie przynosi praca Gaussa z 1809 roku pt. „Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium”. Autor przedstawia podobnie wyglądający liniowy układ równań:

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots \quad (2)$$

i formułuje błąd jako różnicę pomiędzy obliczoną wartością V_i a zaobserwowaną M_i

$$\Delta_i = V_i - M_i \quad (3)$$

Prawdopodobieństwo błędu charakteryzuje krzywą $\varphi(\Delta_i)$, która jest symetryczna i osiąga maksimum dla $\Delta_i = 0$. Przyjmuje aksjomat, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznanej obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru danych, uzyskanego w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Postuluje, do opisu krzywej (rozkładu) błędu, przyjęcie funkcji:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad (4)$$

gdzie h jest stałą związaną z precyzją pomiaru. Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginalnym zapisie dzieła znajduje się wzór (bez nawiasów i znaku potęgowego):

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} \quad (5)$$

Powyższy zapis to postać funkcji gęstości rozkładu normalnego (krzywej dzwonnej).

Znajdujemy w powyższym dziele również zapis równań błędu, podobny do zapisu różniczki zupełnej, w postaci sumy składowych poprzedzonych pochodnymi cząstkowymi. Jest to pierwotny zapis prawa propagacji błędu.

W 1810 roku Laplace w swoim „Supplement au memoire” formułuje tezę, że jeżeli błąd każdej obserwacji jest taki sam, to prawdopodobieństwo, iż błąd średniej n obserwacji będzie zawarty w granicach: $\pm rh/n$, jest równe:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp\left[-\frac{k}{2k'} r^2\right] dr \quad (6)$$

gdzie h jest długością przedziału, wewnątrz którego zawarty jest błąd pojedynczej obserwacji. Prawdopodobieństwo błędu zawartego w granicach od $x = -h/2$ do $x = h/2$ autor oznacza $\varphi(x/h)$ oraz definiuje, że:

$$k = \int \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx, \quad k' = \int \frac{x^2}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) dx \quad (7)$$

Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginale znajdujemy zapis powyższego wzoru całkowego w postaci (odwrócenie zapisu funkcji podcałkowej i użycie litery c do oznaczenia liczby e):

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \cdot \int dr \cdot c^{\frac{k}{2k'} r^2} \quad (8)$$

W ten sposób pojawia się teza jednego z podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, a mianowicie centralnego twierdzenia granicznego.

Należy też dodać, że Laplace jeszcze w latach siedemdziesiątych XVIII stulecia formułuje trzy warunki dotyczące krzywej (rozkładu) błędu: ma być symetryczna względem wartości prawdziwej, gdyż obserwacje jednakowo odchylają się od niej w kierunku wartości większych i mniejszych; musi zdążać do zera oddalając się od wartości prawdziwej, gdyż prawdopodobieństwo, że wartość obserwacji może być nieskończenie różna od wartości prawdziwej jest równe zeru; obszar (pole powierzchni pod krzywą błędu) musi liczbowo być równy jeden, gdyż pewne jest zdarzenie, że każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą. Takie kryteria spełnia oczywiście krzywa rozkładu normalnego, ale propozycję jej zastosowania do opisu rozkładu błędu pomiaru przedstawił dopiero Gauss (Laplace początkowo uważał, że takie kryteria może spełnić wiele funkcji, m.in. logarytmiczne, np. $e(x) = (1/2a) \cdot \log(a/|x|)$, gdzie a wyznacza granicę przedziału błędu e – wnioskowanie z 1777 roku).

Historycznie, zagadnienie wartości prawdziwej związanej z wynikiem pomiaru pojawia się w pracach prekursorów współczesnej metrologii. Już w XVIII wieku uświadamiano sobie, że żaden wynik pomiaru nie będzie zgodny z domniemaną wartością prawdziwą. Przy każdym pojedynczym pomiarze popełnia się pewien błąd wynikający z losowości odczytu wartości obserwacji. Pozostaje zatem zawsze pewna nieznaną różnica pomiędzy wartością obserwacji i jej wartością prawdziwą. Jednym z pierwszych myślicieli, który zastanawiał się na kwestię rozkładu dla tej przypadkowej różnicy, czyli błędu pomiaru, był Thomas Simpson (1710 – 1761). W 1757 roku zastanawiając się nad kształtem krzywej błędu pomiaru wywnioskował, że jeżeli błąd pomiaru zawiera się w granicach określonego odcinka, to wyniki pomiaru powinny się powtarzać proporcjonalnie do ciągu liczbowego: 1, 2, ..., n , ..., 2, 1, przyjmując wartości w obrębie tego przedziału. Było to pierwsze w historii wyobrażenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pomiaru, w postaci dyskretnej. Jak można się łatwo domyśleć miała ona postać trójkąta równoramiennego, dlatego rozkład trójkątny często nazywany jest rozkładem Simpsona.

Jednakże nie rozkład trójkątny, lecz właśnie rozkład normalny jest jednym z podstawowych rozkładów rachunku prawdopodobieństwa, służących do opisu krzywej błędu, a ze względu na powyższe okoliczności nosi również nazwę rozkładu Laplace’a-Gaussa. Stał się podstawą oceny wyniku pomiaru i jednym z założeń wykorzystywanych w teorii niepewności. Teoria ta bowiem zakłada, że każda obserwacja wywodzi się z populacji o rozkładzie normalnym. To oczywiście nie oznacza, że rozkład związany z wielkością mierzoną jest normalny. Ten należy dopiero wyznaczyć, stosując metodę propagacji rozkładów wielkości wejściowych na podstawie modelu matematycznego wielkości wyjściowej.

Trzy wymienione powyżej historyczne rozwiązania tworzą podstawy współczesnej metrologii teoretycznej w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Powstały na wiele lat przed ich praktycznym zastosowaniem i, choć zostały przyjęte bez naukowego dowodzenia, świadczą o trafności wnioskowania. Powstały prawie w tym samym czasie, niezależnie w umysłach ich twórców, gdyż obieg informacji nauko-

wej w początkach XIX wieku był bardzo ograniczony. Można sądzić, że autorzy rozwiązań, choć stworzyli nierozzerwalny łańcuch wnioskowań (centralne twierdzenie graniczne wymaga przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym, a ten umożliwia rozwiązanie problemu propagacji błędu, która nie może się obejść bez metody najmniejszych kwadratów), to prawdopodobnie nie znali swoich prac. Ten krótki czas pomiędzy rokiem 1805 i 1810 zbudował podstawy niepewności pomiaru. Miało to miejsce w dobie romantyzmu, która to aksjologicznie w nauce kojarzy się, nie bez przyczyny, z genialną intuicją.

5. Teoria prawdopodobieństwa warunkowego w metrologii

Obok koncepcji Uncertainty Approach we współczesnej literaturze metrologicznej dyskutowana jest metodyka bayesianowska opracowania danych pomiarowych. Podejście to opiera się na twierdzeniu Thomasa Bayesa (1702 – 1761) o prawdopodobieństwie warunkowym. W tym miejscu można zauważyć, że początki zagadnień związanych z niepewnością pomiaru należy wiązać z postaciami dwóch Thomasów: Simpsona i Bayesa. Obaj żyli i tworzyli w tym samym miejscu i czasie, w Anglii pierwszej połowy XVIII wieku.

Teoria prawdopodobieństwa warunkowego pozwala na łączenie informacji o wielkości mierzonej pochodzącej spoza pomiaru z danymi pomiarowymi. Wiedza o wielkości mierzonej nigdy nie jest kompletna, ale można ją jedynie przybliżyć, łącząc ze sobą informacje różnej natury. Koncepcja powyższa sprowadza się do tezy, że rozkład prawdopodobieństwa wielkości mierzonej, w postaci zbioru możliwych dla niej wartości, powstały w oparciu o dostępną wiedzę, aktualizowany jest na podstawie informacji dostarczonych przez dane pomiarowe. Informacje te przedstawiane są w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Funkcja tworzona jest na podstawie dostępnej informacji (*state of knowledge*) o wielkości mierzonej, która nigdy nie jest pełna i kompletna. Dostępna wiedza o niej jedynie charakteryzuje stopień wiary (*degree of belief*), że wielkość można wyrazić poprzez rozkład możliwych dla niej wartości. Przyjmuje się, że zbiór tych wartości opisuje wielkość mierzoną, wyrażaną poprzez jego parametry probabilistyczne w postaci wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i przedziału rozszerzenia. Wartość oczekiwana jest miarą esymaty wielkości, a odchylenie standardowe miarą niepewności standardowej.

Przyjmuje się, że wiedzę o wielkości mierzonej można czerpać bezpośrednio z pomiaru, na podstawie danych pomiarowych oraz spoza pomiaru, na podstawie informacji o procesie pomiarowym. Na podstawie analizy powyższej wiedzy powstają dwa zbiory informacji. Zbiór określony na podstawie wiedzy o samym pomiarze stanowi informację pierwotną (*prior information*) o wielkości mierzonej. Probabilistyczne parametry tego zbioru wyznaczane są na ogół przed wykonaniem pomiaru. W trakcie pomiaru natomiast pozyskiwane są dane, które służą do określenia drugiego zbioru, którego parametry określane są metodą statystyczną. Dane te aktualizują zbiór pierwotny tworząc nowy zbiór wynikowy (*posterior information*). Zbiór ten także charakteryzowany jest parametrami probabilistycznymi.

Wyznaczenie zbioru wynikowego opiera się na twierdzeniu Bayesa, które mówi, że prawdopodobieństwo tego zbioru jest iloczynem prawdopodobieństw zbioru pierwotnego i zbioru danych. Zasadę powyższą można zapisać w ogólnej postaci:

$$p(Y|AB) = C \cdot p(Y|A) \cdot p(Y|B) \quad (9)$$

gdzie Y oznacza wielkość mierzoną, A oznacza zbiór danych pomiarowych, B oznacza zbiór informacji o wielkości mierzonej, wynikającą z wiedzy o procesie pomiarowym, a C jest stałą proporcjonalności. Celem działania metrologicznego jest wyznaczenie zbioru $Y|AB$. Zapis powyższy oznacza, że informacja o wielkości mierzonej Y jest warunkowana danymi pomiarowymi A i wiedzą wcześniejszą o pomiarze B . Równanie powyższe można zapisać w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla wielkości mierzonej:

$$g(\eta|\mu, \sigma) = K \cdot g(\eta) \cdot l(\eta; \mu, \sigma) \quad (10)$$

gdzie K oznacza stałą proporcjonalności, $g(\eta)$ funkcję gęstości prawdopodobieństwa danych pomiarowych, $l(\eta; \mu, \sigma)$ funkcję wiarygodności dotyczącą wiedzy o pomiarze na podstawie wcześniejszej analizy procesu pomiarowego. Funkcja ta ma określone parametry wynikające z posiadanej wiedzy. Na jej podstawie przyjmuje się wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ . Zakłada się również dla tej funkcji rozkład normalny w postaci:

$$l(\eta; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\eta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

Dla danych pomiarowych oba parametry estymuje się odpowiednimi statystykami na podstawie serii obserwacji. Estymatą wartości oczekiwanej jest wartość średnia, a estymatą odchylenia standardowego statystyka bayesianska postaci:

$$s(\bar{y})_{\text{Bayes}} = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} s(\bar{y}) \quad (12)$$

gdzie $s(\bar{y})$ to odchylenie standardowe eksperymentalne średniej, n to liczba obserwacji. Należy pamiętać, że zależność powyższa ma sens matematyczny, gdy $n > 3$. Zastosowanie powyższej statystyki, w miejsce odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej, spowodowane jest przyjęciem założenia o normalności rozkładu dla danych pomiarowych. Jak wiadomo z podstaw statystyki matematycznej, zgodnie z wnioskowaniem Williama Gosseta (1876–1937), rozkładem dla średniej z ograniczonej liczbie serii obserwacji jest rozkład zmiennej t zwany rozkładem Studenta (ściśle jest to rozkład ilorazu różnicy tej średniej i wartości oczekiwanej populacji danych, o rozkładzie normalnym, w odniesieniu do odchylenia standardowego eksperymentalnego średniej). Należy dodać, że mnożnik we wzorze powyżej jest równy odchyleniu standardowemu tego rozkładu o liczbie stopni swobody $\nu = n - 1$.

Przyjęcie założenia o normalności rozkładu ma również dodatkowy aspekt, a mianowicie ten, że parametry rozkładu dla wielkości mierzonej są stałymi, a nie zmiennymi losowymi jak w podejściu statystycznym (gdy wielkość mierzona ocenia

się tylko na podstawie serii obserwacji). Funkcję gęstości rozkładu związanego z danymi pomiarowymi można zapisać w postaci:

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s(\bar{y})_{\text{Bayes}}} \exp\left(-\frac{(\eta - \bar{y})^2}{2s(\bar{y})_{\text{Bayes}}^2}\right) \quad (13)$$

Aby wyznaczyć parametry rozkładu wynikowego dla wielkości mierzonej, powstałego w oparciu o twierdzenie Bayesa, przyjmijmy dla wygody następujące oznaczenia: $y_1 = \mu$; $u_1 = \sigma$ oraz $y_2 = \bar{y}$; $u_2 = s(\bar{y})_{\text{Bayes}}$. Uzyskujemy proporcjonalność:

$$g(\eta|y_1, u_1) \propto \exp\left[-\frac{(\eta - y_1)^2}{2u_1^2} - \frac{(\eta - y_2)^2}{2u_2^2}\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{y_1}{u_1^2} + \frac{y_2}{u_2^2}\right)\eta\right] \quad (14)$$

Ponieważ wzajemne przemnażanie funkcji Gaussa daje w wyniku również funkcję Gaussa, to istnieje taka jej postać, że:

$$g(\eta|y_1, u_1) \propto \exp\left[-\frac{(\eta - y)^2}{2u^2}\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{y}{u^2}\right)\eta\right] \quad (15)$$

Prowadzi to do wniosku, iż parametry funkcji wynikowej (*posterior function*), opisującej wielkość mierzoną, powiązane są zależnościami:

$$\frac{y}{u^2} = \frac{y_1}{u_1^2} + \frac{y_2}{u_2^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} \quad (16)$$

gdzie y jest estymatą wielkości mierzonej, a u niepewnością standardową. Można te parametry zapisać w postaci:

$$y = y_1 \left(\frac{u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}\right) + y_2 \left(\frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2}\right) \quad \text{oraz} \quad u^2 = \frac{u_1^2 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \quad (17)$$

W pomiarach nazywanych porównaniami ta sama wielkość mierzona wyznaczana jest przez wielu uczestników porównań. Każdy z nich może otrzymać inną wartość estymaty wielkości i związanej z nią niepewności standardowej. Parametry te można traktować jako warunkujące nieznany rozkład prawdopodobieństwa związany z wielkością mierzoną:

$$g(\eta|y_1, u_1, \dots, y_N, u_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} u_i} \exp\left(-\frac{(\eta - y_i)^2}{2u_i^2}\right) \quad (18)$$

Powyższe równanie ma jedynie sens, gdy każdej estymacie wielkości można przypisać rozkład normalny. Znajdując proporcjonalność:

$$g(\eta|y_1, u_1, \dots, y_N, u_N) \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(\eta - y_i)^2}{u_i^2}\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2}\right) \eta^2 + \left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{u_i^2}\right) \eta\right] \quad (19)$$

oraz wiedząc, że istnieje taka funkcja Gaussa dla której:

$$g(\eta|y_1, u_1, \dots, y_N, u_N) \propto \exp\left[-\frac{(\eta - y)^2}{2u}\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{y}{u^2}\right)\eta\right] \quad (20)$$

możemy otrzymać:

$$\frac{y}{u^2} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{u_i^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{u^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2} \quad (21)$$

Na tej podstawie określa się parametry wartości odniesienia dla wyników porównań międzylaboratoryjnych:

$$y = u^2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{u_i^2} \quad \text{oraz} \quad u^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{u_i^2} \right)^{-1} \quad (22)$$

gdzie y_i to estymata wielkości mierzonej otrzymana w i -tym laboratorium pomiarowym, a u_i to niepewność standardowa związana z tą estymatą. Zależności powyższe stosuje się w praktyce przy ocenie wyników pomiarów porównawczych, gdy wielkość mierzoną, w postaci np. wzorca, bada się w różnych laboratoriach, pragnąc uzyskać wynik wartości odniesienia. Wykorzystuje się je przy ocenie wartości odniesienia w porównaniach kluczowych, do realizacji wartości jednostki miary SI, poprzez wyznaczenie wartości odniesienia porównań kluczowych. Przyjmuje się ją jako najbliższą realizację jednostki miary SI.

Teoria prawdopodobieństwa warunkowego przedstawiona powyżej dobrze sprawdza się przy opracowaniu wyników porównań międzylaboratoryjnych. Podstawowym, stawianym tu problemem jest pytanie, jaka jest wartość i niepewność wielkości mierzonej, gdy wyniki pomiaru uzyskiwane są w różnych laboratoriach pomiarowych, z których każde wyznacza jej inną wartość wraz z niepewnością. Uzyskiwane wartości wielkości mierzonej są w rozsądny sposób uśredniane wagowo, a rolę tych wag pełnią niepewności pomiaru.

6. Podsumowanie

Celem tego rozdziału było przedstawienie różnych aspektów związanych z wyrażaniem niepewności pomiaru, znajdujących odbicie we współczesnej literaturze metrologicznej. Podkreślono również aspekt historyczny, obszernie zarysowany w pracy [26], gdyż zagadnienia niepewności pomiaru mają swoją ciągłość i ewoluują wraz z rozwojem nauk ścisłych. W powyższym aspekcie należy dodać, że współczesna teoria niepewności, przedstawiona w pracy [10], łączy podejście realizowane na gruncie statystyki matematycznej z podejściem probabilistycznym.

Zagadnienie roli prawdopodobieństwa warunkowego przy opracowaniu danych pomiarowych, zgodne z podejściem bayesianowskim, można natomiast znaleźć w pracy [13]. Aspekt ten ma charakter przyszłościowy, gdyż zagadnieniu temu będzie poświęcony ostatni z przygotowywanych dokumentów JCGM na temat „Bayesian methods”.

Należy podkreślić, że współczesne podejście promujące metodę propagacji rozkładów (propagation of distribution), które uzupełnia, a nawet zastępuje podejście

w postaci propagacji niepewności (uncertainty propagation), rozszerza metodykę opracowania danych pomiarowych, wynikającą z analizy wariancyjnej, na rzecz opisu wielkości mierzonej w postaci policzalnego rozkładu prawdopodobieństwa związanego z tą wielkością.

Można również dodać, że w wiodących czasopismach związanych z metrologią, na przestrzeni ostatnich lat, odnotowuje się dużą liczbę artykułów poświęconych problematyce niepewności pomiaru. Oto niektóre z nich: „Metrologia” – 200, „Measurement Science and Technology” – 80, „Measurement” – 80. Wśród nich ponad połowa to prace dotyczące teoretycznych aspektów niepewności, w tym zagadnień związanych z opracowaniem danych pomiarowych, metod obliczeniowych czy problematyki porównań wyników pomiaru. Publikacje te obejmują szerokie spektrum aktualnych spraw dyskutowanych na forum międzynarodowym.

Literatura

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. International Organization for Standardization 1993, 1995 (corrected and reprinted).
- [2] B. N. Taylor, C. E. Kuyatt: *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*. National Institute of Standards and Technology. Technical Note 1297, 1994.
- [3] *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration*. European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/02, 1999.
- [4] *Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement*. ERACHEM/CITAC Guide, 2000.
- [5] *Measurement Uncertainty in Testing*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2002.
- [6] *EA guidelines on the expression of uncertainty in quantitative testing*. European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/16, 2003.
- [7] *Guide to the Evaluation of Measurement Uncertainty for Quantitative Test Results*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2006.
- [8] *Measurement uncertainty revisited: Alternative approaches to uncertainty evaluation*. European Federation of National Associations of Measurement, Testing and Analytical Laboratories. Technical Report No. 1/2007.
- [9] *Use of uncertainty information in compliance assessment*. ERACHEM/CITAC Guide, 2007.
- [10] C. F. Dietrich: *Uncertainty, Calibration and Probability*. The Statistics of Scientific and Industrial Measurement. Second Edition 1991. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology.
- [11] H. W. Coleman, W. G. Steele: *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*. Second Edition. John Wiley & Sons, 1999.
- [12] R. H. Dieck: *Measurement Uncertainty: Methods and Applications*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 3rd edition, 2002.
- [13] I. Lira: *Evaluating the Measurement Uncertainty*. Fundamental and Practical Guidance. Series in Measurement and Technology. Institute of Physics Publishing, 2002.
- [14] S. K. Kimothi: *The Uncertainty of Measurements*. Physical and Chemical Metrology: Impact and Analysis. ASQ Quality Press, 2002.

- [15] H. L. Harney: *Bayesian Inference*. Parameter Estimation and Decisions. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, s. 263.
- [16] I. Gertsbakh: *Measurement Theory for Engineers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, s. 150.
- [17] S. G. Rabinovich: *Measurement Errors and Uncertainties*. Theory and Practice. Springer Science and Media, 3rd edition, 2005.
- [18] W. Fellin, H. Lessmann, M. Oberguggenberger, R. Vieider: *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [19] M. Grabe: *Measurement Uncertainties in Science and Technology*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [20] L. Kirkup, B. Frenkel: *An introduction to uncertainty in measurement using the GUM (Guide to the expression of uncertainty in measurement)*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] B. M. Ayyub, G. J. Klir: *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*. Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, 2006.
- [22] D. V. Lindley: *Understanding Uncertainty*. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.
- [23] G. J. Klir: *Uncertainty and Information*. Foundations of Generalized Information Theory. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006.
- [24] S. Salicone: *Measurement Uncertainty*. An Approach via the Mathematical Theory of Evidence. Springer Series in Reliability Engineering, 2007.
- [25] B. Liu: *Uncertainty Theory*. Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [26] S. M. Stigler: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press. Ninth printing, 2003.
- [27] *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. ISO/IEC Guide 98-3/Suppl. 1:2008. BIPM JCGM 101:2008. Guide OIML G 1-101, Edition 2008 (E).
- [28] *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*. BIPM JCGM 100:2008. Guide OIML G 1-100, Edition 2008 (E).
- [29] *Evaluation of measurement data – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents*. BIPM JCGM 104:2009.
- [30] *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms*. JCGM 200:2008.
- [31] *Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane (VIM)*. PKN-ISO/IEC Guide 99, 2010.