

METODA OBLICZANIA PRZEDZIAŁU I WSPÓŁCZYNNIKA ROZSZERZENIA PRZY OPRACOWANIU WYNIKU POMIARU

Paweł Fotowicz
Główny Urząd Miar

1. Wstęp

W najnowszych opracowaniach [1], powstających pod auspicjami Międzynarodowego Biura Miar, preferowana jest zasada propagacji rozkładów, polegająca na przedstawianiu wyniku pomiaru w postaci rozkładu prawdopodobieństwa, wyznaczonego na podstawie rozkładów wielkości wejściowych poprzez matematyczny model pomiaru wielkości mierzonej. Realizować ją można na drodze symulacji Monte Carlo. Celem takiego działania jest wyznaczenie przedziału rozszerzenia dla wielkości mierzonej.

Przedział rozszerzenia został przyjęty jako miara niepewności wielkości mierzonej. Przedział ten obejmuje znaczącą część zbioru możliwych wartości dla wielkości mierzonej. Określa on szerokość rozkładu wielkości mierzonej.

W celu ułatwienia obliczeń przedziału rozszerzenia została opracowana metoda analityczna, którą można stosować dla liniowego modelu pomiaru, najczęściej wykorzystywanego w pomiarach bezpośrednich. Dokładność obliczeniowa metody jest porównywalna z numeryczną metodą odniesienia (symulacją Monte Carlo), dającą ten sam rezultat obliczeniowy przedziału rozszerzenia, gdy niepewność standardową wyznacza się z dwoma cyframi znaczącymi.

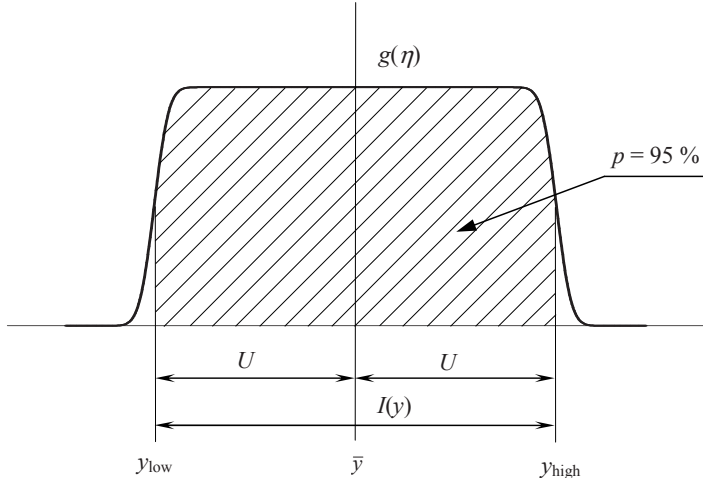
Z obliczaniem przedziału rozszerzenia związane jest również zagadnienie wyznaczania współczynnika rozszerzenia, który może być traktowany jak kwantyl rozkładu wielkości mierzonej. Problematyka ta wynika głównie z potrzeby podawania jego wartości w świadectwach wzorcowania przyrządów pomiarowych [2]. Przy opracowaniu wyniku wzorcowania stosuje się na ogół liniowe równania pomiaru, co czyni metodę szczególnie przydatną dla laboratoriów wzorcujących.

2. Przedział i współczynnik rozszerzenia

Dla wielkości wyjściowej y określa się przedział rozszerzenia zawierający z zadanym prawdopodobieństwem zbiór możliwych wartości dla wielkości mierzonej. Przedział ten zdefiniowany jest w postaci dwóch umownie przyjętych wartości granicznych (rys. 1):

$$I(y) = [y_{\text{low}}, y_{\text{high}}] \quad (1)$$

z których y_{low} oznacza dolną, a y_{high} górną granicę przedziału.



Rys. 1. Przedział rozszerzenia dla symetrycznego rozkładu wartości wielkości mierzonej

Dla zbioru wartości y można zbudować standaryzowaną zmienną losową w postaci:

$$\eta = \frac{y - \bar{y}}{u(y)} \quad (2)$$

gdzie $\bar{y}$ jest estymatą, a $u(y)$ niepewnością standardową. Można zdefiniować również granice w postaci:

$$\eta_{\text{low}} = \frac{y_{\text{low}} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) \quad (3)$$

$$\eta_{\text{high}} = \frac{y_{\text{high}} - \bar{y}}{u(y)} = G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \quad (4)$$

gdzie $G^{-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu opisanego dystrybucją $G(\eta)$, a p prawdopodobieństwem rozszerzenia. Dla symetrycznego probabilistycznie rozkładu zachodzi równość:

$$G^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) = -G^{-1}\left(\frac{1-p}{2}\right) = k \quad (5)$$

gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia. Z uwagi na (3) i (4) mamy:

$$y_{\text{low}} = \bar{y} - k \cdot u(y) = \bar{y} - U \quad (6)$$

$$y_{\text{high}} = \bar{y} + k \cdot u(y) = \bar{y} + U \quad (7)$$

gdzie $U = k \cdot u(y)$ jest niepewnością rozszerzoną.

Dla funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g(\eta)$ spełnione jest równanie:

$$\int_{-k}^k g(\eta) d\eta = p \quad (8)$$

Na ogół przyjmuje się, że $p = 95 \%$.

Jeżeli wielkość wyjściowa y związana jest zależnością liniową z wielkościami wejściowymi x_i , to funkcja gęstości rozkładu związanego z wielkością mierzoną jest splotem funkcji gęstości rozkładów związanych z wielkościami wejściowymi:

$$g(\eta) = g_1(\xi_1) * \dots * g_N(\xi_N) \quad (9)$$

gdzie ξ_i są standaryzowanymi zmiennymi losowymi wielkości wejściowych:

$$\xi_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{u(x_i)} \quad (10)$$

a $\bar{x}_i$ jest estymatą wielkości wejściowej w postaci wartości średniej, a $u(x_i)$ niepewnością standardową wielkości wejściowej.

3. Metoda analityczna

Metoda analityczna polega na przybliżeniu wyniku operacji splotu matematycznego standardowych rozkładów wielkości wejściowych. Mogą nimi być rozkłady: Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny i trapezowy. W metodzie wykorzystano jako bardzo efektywne przybliżenie wielokrotnego splotu rozkładów: normalnego, prostokątnego, trójkątnego i trapezowego rozkładem P*N. Rozkład ten jest pojedynczym splotem rozkładu prostokątnego z normalnym [3]. Funkcję gęstości rozkładu P*N (rys. 2) najdogodniej można przedstawić jako zależną od parametru r , będącego ilorazem odchyłeń standardowych σ_p i σ_N tworzących go rozkładów prostokątnego i normalnego:

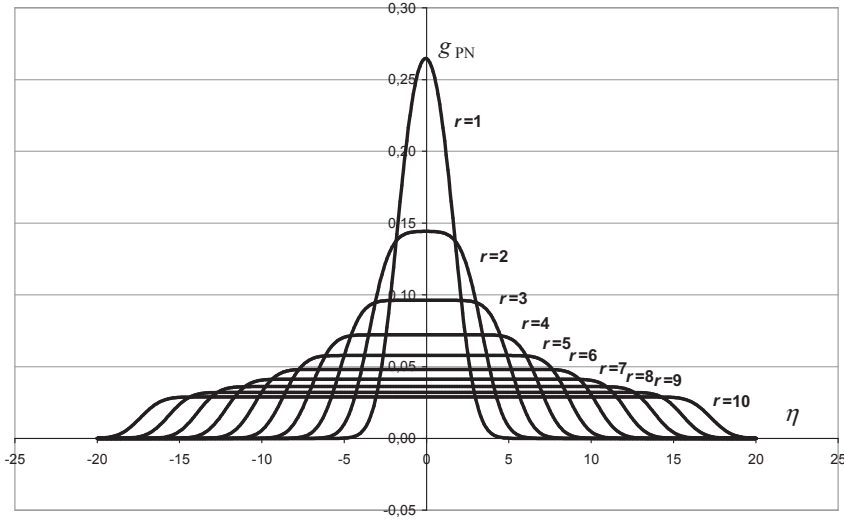
$$g_{PN}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi} r} \int_{\eta-\sqrt{3}\cdot r}^{\eta+\sqrt{3}\cdot r} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] d\xi \quad (11)$$

$$r = \frac{\sigma_p}{\sigma_N} \quad (12)$$

Parametr r rozkładu P*N można przybliżyć ilorazem udziału [4]:

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \quad (13)$$

gdzie $u_i(y) = c_i u(x_i)$ to największy udział niepewności wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym.



Rys. 2. Funkcje gęstości splotu P*N rozkładów prostokątnego i normalnego o różnych parametrach r

Przybliżenie powyższe można rozszerzyć o splot rozkładów trójkątnych i trapezowych. W celu znalezienia największego udziału wielkości o rozkładzie prostokątnym, w każdym z tych rozkładów należy określić jego większą składową prostokątną. Każdy z tych rozkładów bowiem to splot dwóch składowych prostokątnych.

Rozkład trójkątny jest splotem dwóch jednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trójkątnym o podstawie $2a$ dana jest zależnością:

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (14)$$

Niepewność standardowa składowej prostokątnej tworzącej rozkład trójkątny ma postać:

$$u'(x_i) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (15)$$

co prowadzi do zależności:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

Rozkład trapezowy natomiast jest splotem dwóch niejednakowych rozkładów prostokątnych. Niepewność standardowa wielkości opisanej rozkładem trapezowym o podstawie dolnej $2a$ i górnej $2b$ dana jest zależnością:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}} \quad (17)$$

Niepewność standardowa większej składowej prostokątnej tworzącej rozkład trapezowy ma postać:

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \quad (18)$$

co prowadzi do zależności:

$$u'(x_i) = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} u(x_i) \quad (19)$$

Splot rozkładów Studenta można przybliżyć splotem równoważnych im rozkładów normalnych. Owa równoważność polega na przyjęciu takich rozkładów normalnych, dla których przedziały rozszerzenia są takie same co do wartości, jak wyznaczone na podstawie rozkładów Studenta dla danego poziomu ufności. Aby osiągnąć tę równoważność, należy zastąpić rozkład Studenta rozkładem normalnym, a niepewność standardową wielkości wejściowej powiększyć o iloraz kwantyli tych rozkładów:

$$u'(x_i) = \frac{t(v)}{k_N} u(x_i) \quad (20)$$

gdzie $t(v)$ to kwantyl rozkładu Studenta z liczbą stopni swobody v , a k_N to współczynnik rozszerzenia (kwantyl) rozkładu normalnego ($k_N = 1,96$ dla $p = 95\%$). Błąd powyższego przybliżenia dla splotu dwóch rozkładów Studenta o określonych liczbach stopni swobody nie przekracza 2% (rys. 3).

Niepewność rozszerzoną można wyznaczyć z zależności:

$$U = k_{PN} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{t(v)}{k_N} u_i(y) \right)^2} \quad (21)$$

gdzie k_{PN} to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu P*N. Wartości powyższego współczynnika dla prawdopodobieństwa 95% zostały przedstawione w tabeli 1 [5, 6]. Dla rozkładów normalnego, prostokątnego, trójkątnego i trapezowego należy przyjąć, że $t(v) = k_N$.

Współczynnik k_{PN} można również wyznaczyć w przybliżony sposób [7]:

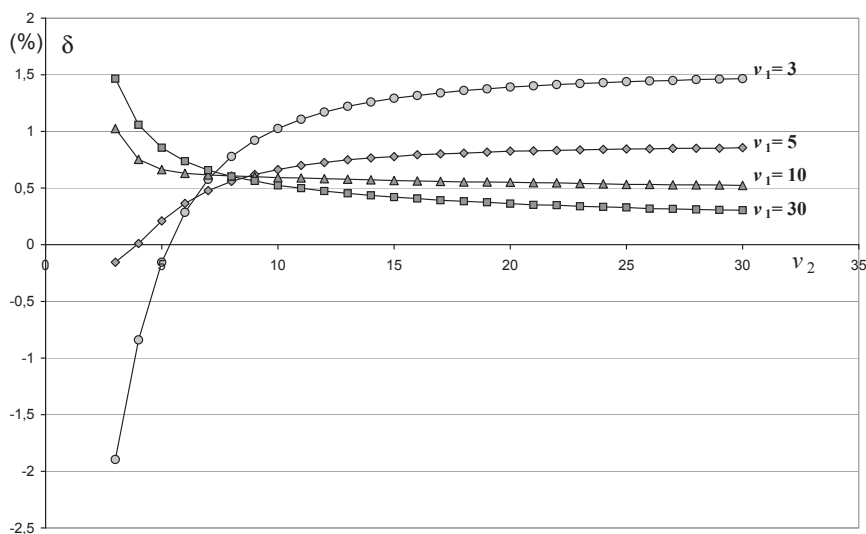
$$\begin{aligned} k_{PN} &= k_N \text{ dla } 0 \leq r < 1 \\ k_{PN} &= k_T \text{ dla } 1 \leq r \leq 10 \\ k_{PN} &= k_p \text{ dla } r > 10 \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$$k_T = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}} (1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}) \quad (23)$$

$$k_p = \sqrt{3}p \quad (24)$$

gdzie k_T to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, a k_p to współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego. Wykorzystano tu przybliżenie rozkładu P*N trzema standardowymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym w zależności od wartości ilorazu udziału, co również daje dobre wyniki przybliżenia wielokrotnego spłotu wymienionych rozkładów.



Rys. 3. Błąd przybliżenia przedziału rozszerzenia dla spłotu dwóch rozkładów Studenta o różnych stopniach swobody: ν_1 i ν_2

Tab. 1. Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla prawdopodobieństwa 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Obliczając, na podstawie równania propagacji niepewności, złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ można również wyznaczyć współczynnik rozszerzenia z:

$$k = \frac{U}{u_c(y)} \quad (25)$$

który jest przybliżeniem kwantyla rozkładu związanego z wielkością mierzoną.

4. Ocena dokładności metody

Ocenę dokładności metody można przeprowadzić porównując wartości niepewności rozszerzonej otrzymanych powyższą metodą z wartościami uzyskanymi przy zastosowaniu obliczeń numerycznych. Błąd metody zdefiniowano jako:

$$\delta = \frac{U - U_{\text{splot}}}{U_{\text{splot}}} \quad (26)$$

gdzie U to niepewność rozszerzona obliczona ze wzoru (21), a U_{splot} to niepewność rozszerzona obliczona metodą wielokrotnego splotu rozkładów wielkości wejściowych.

Błąd metody analizowano dla prawdopodobieństwa 95 % w odniesieniu do wielokrotnego splotu rozkładów prostokątnych oraz splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych. Obliczenia wykonano zarówno przy zastosowaniu do wyznaczania współczynnika k_{PN} tabeli 1, jak i formuły przybliżonej (22).

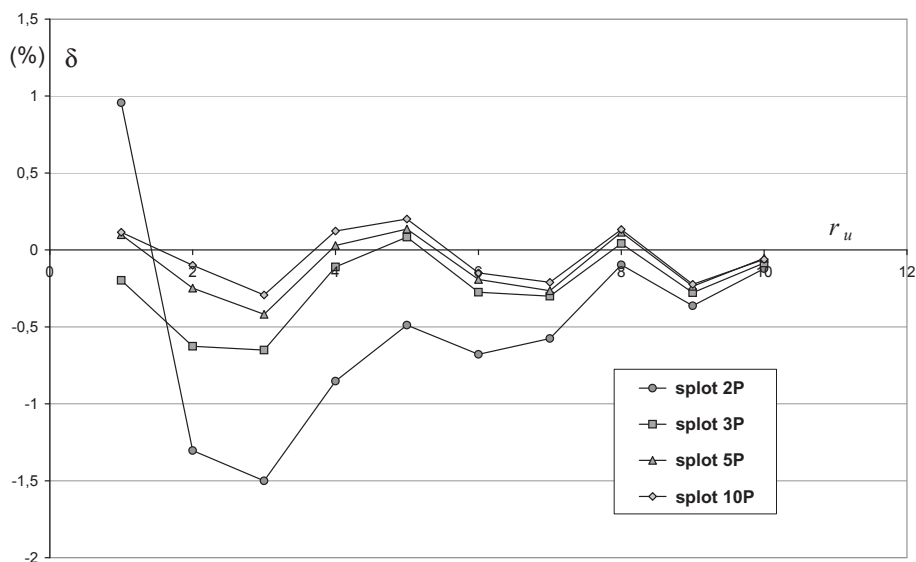
Błąd w pierwszej sytuacji obliczeniowej przedstawiają rysunki 4 i 5. Największą wartość osiąga w odniesieniu do splotu dwóch rozkładów prostokątnych, dla których dochodzi do 1,5 %. W pozostałych przypadkach splotu wielu rozkładów prostokątnych nie przekracza wartości 1 %, a w przypadku splotu mieszanego rozkładów prostokątnych i normalnych błąd jest mniejszy od 0,5 %.

Błąd w drugiej sytuacji obliczeniowej przedstawiają rysunki 6 i 7. Jego największa wartość nie przekracza 2,5 %, a w przypadku wielokrotnego splotu rozkładów prostokątnych błąd jest mniejszy od wartości 1,5 %.

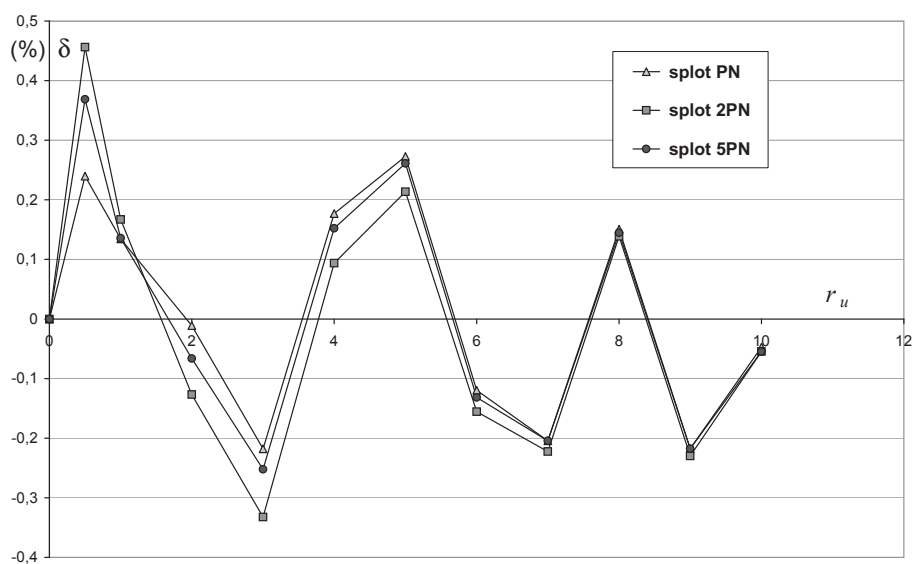
Porównywalne wartości błędów metody, przy obliczeniach wykonywanych dwoma opisanymi sposobami, wynikają z faktu niewielkich różnic pomiędzy wartościami odpowiadających sobie współczynników k_{PN} i k_{T} . Ich przebieg ilustruje rys. 8. Błąd względny porównania powyższych współczynników można zdefiniować przy użyciu formuły:

$$\delta_{\text{T}} = \frac{k_{\text{T}} - k_{\text{PN}}}{k_{\text{PN}}} \quad (27)$$

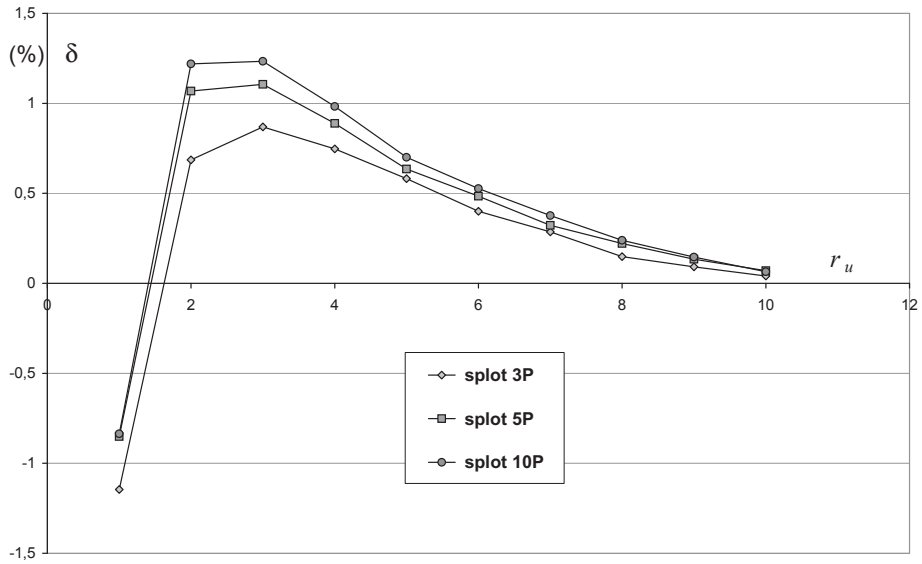
Błąd ten w funkcji ilorazu r dla prawdopodobieństwa $p = 95$ % przedstawiono na rys. 9. Wartość błędu nie przekracza 1,5 % dla zakresu zmian ilorazu r od 1 do 10, w którym ma zastosowanie równość $k_{\text{PN}} = k_{\text{T}}$ (22). Natomiast maksymalna wartość błędu przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla rozkładu P*N trzema standardowymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym, dla pełnego zakresu zmienności ilorazu r , mieści się w przedziale ± 2 %, co ilustruje rys. 10.



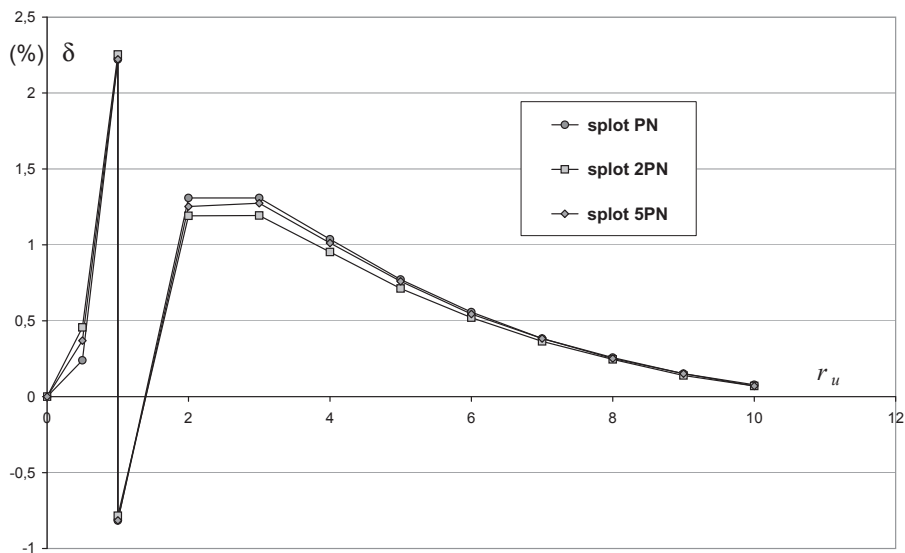
Rys. 4. Błąd metody w odniesieniu do splotu dwóch (2P), trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych przy wykorzystaniu tabeli 1



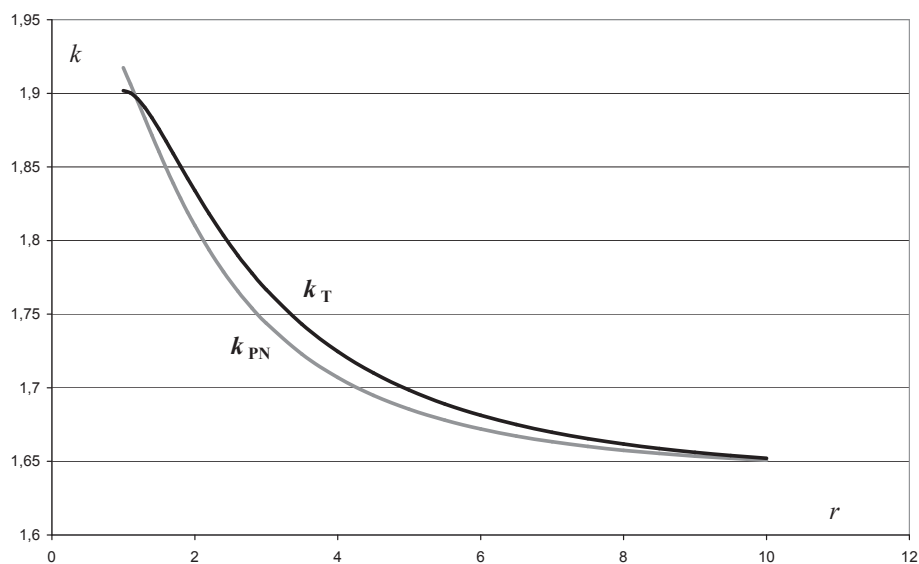
Rys. 5. Błąd metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego przy wykorzystaniu tabeli 1



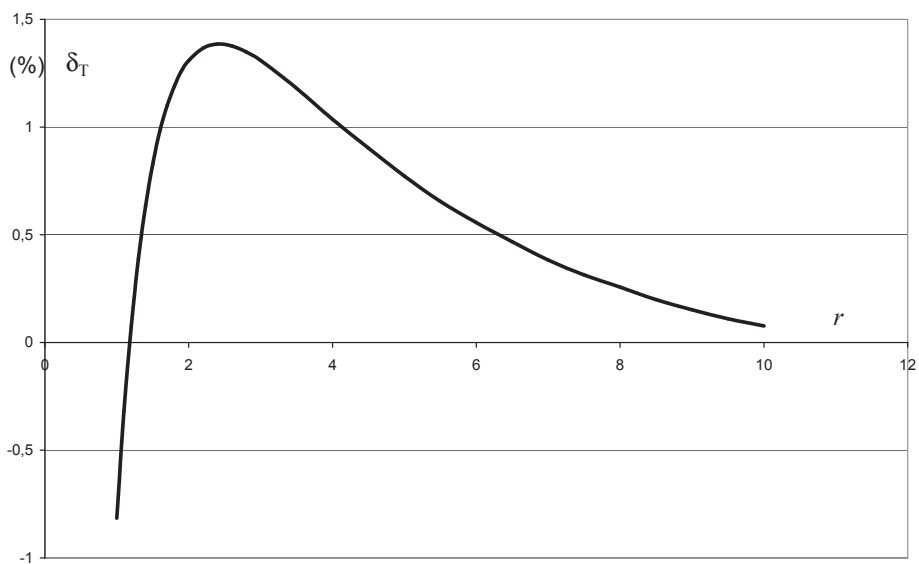
Rys. 6. Błąd metody w odniesieniu do splotu trzech (3P), pięciu (5P) i dziesięciu (10P) rozkładów prostokątnych przy zastosowaniu przybliżenia (22)



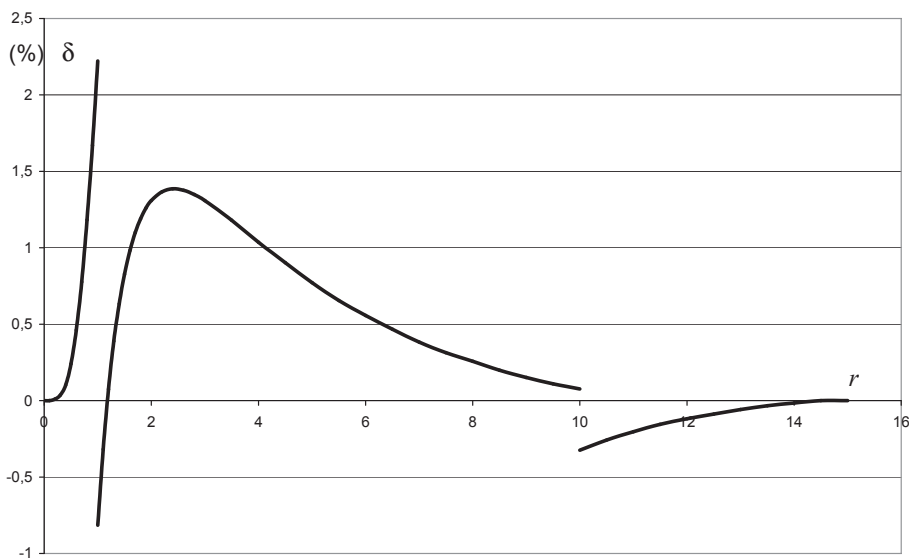
Rys. 7. Błąd metody w odniesieniu do splotu pojedynczego (PN), podwójnego (2PN) i pięciokrotnego (5PN) rozkładów prostokątnego i normalnego przy zastosowaniu przybliżenia (22)



Rys. 8. Współczynnik rozszerzenia dla splotu rozkładu prostokątnego z normalnym i dla rozkładu trapezowego dla $p = 95 \%$



Rys. 9. Błąd przybliżenia współczynnika rozszerzenia dla splotu rozkładów prostokątnego i normalnego współczynnikiem rozszerzenia dla rozkładu trapezowego, dla $p = 95 \%$



Rys. 10. Funkcja błędu metody aproksymacji współczynnika rozszerzenia

Na podstawie przedstawionej analizy można oczekiwać, że błąd w przypadku przybliżenia niepewności rozszerzonej wielkości wyjściowej, będącej złożeniem wielu wielkości wejściowych opisanych rozkładami Studenta, normalnymi czy prostokątnymi, nie powinien być większy niż przedstawiony powyżej, ponieważ spłot rosnącej liczby rozkładów składowych dąży do rozkładu normalnego.

Należy dodać, że metodę można stosować przy spełnieniu następujących warunków: wielkość wyjściowa jest funkcją liniową wielkości wejściowych, wielkości wejściowe są zmiennymi losowymi niezależnymi oraz wielkościom wejściowym można przypisać następujące rozkłady: Studenta, normalny, prostokątny, trójkątny lub trapezowy. Konieczność spełnienia tych warunków wynika z zastosowania operacji splotu matematycznego przy obliczaniu rozkładu wynikowego, którą można wykonać, gdy mamy do czynienia z liniową zależnością pomiędzy wielkościami wejściowymi, będącymi jednocześnie zmiennymi losowymi niezależnymi. Jednakże warunki te w niczym nie ograniczają praktycznej stosowalności metody, gdyż przy opracowaniu wyników pomiaru, szczególnie bezpośredniego, z założenia stosuje się modele liniowe pomiaru, zawierające szereg składowych powiązanych ze sobą addytywnie. Przypisywanie tym składowym podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa też nie czyni istotnego problemu. Z reguły bowiem przypisuje się im właśnie te rozkłady; Studenta przy analizie składowej przypadkowej, a pozostałe przy ocenie składowych systematycznych. Metoda zatem nadaje się w pełni do analizy wyniku pomiaru bezpośredniego.

5. Podsumowanie

Analityczna metoda obliczania przedziału i współczynnika rozszerzenia powstała w celu opracowania wyniku pomiaru wyrażanego w postaci przedziału rozszerzenia, zgodnie z przyjętymi definicjami zawartymi w najnowszych międzynarodowych, metrologicznych dokumentach dotyczących analizy danych pomiarowych [1]. Metoda jest alternatywna dla zalecanej tam numerycznej metody odniesienia (Monte Carlo), gdy mamy do czynienia z liniowym lub linearyzowanym modelem pomiaru. Przy czym nie wymaga zastosowania zaawansowanych, specjalistycznych programów komputerowych i może być w prosty sposób implementowana do powszechnie dostępnych narzędzi obliczeniowych, np. w postaci arkusza kalkulacyjnego. Jej dokładność obliczeniowa jest porównywalna z metodą odniesienia. Pozwala na wyznaczanie niepewności rozszerzonej dla prawdopodobieństwa 95 % z zachowaniem wiarygodności drugiej cyfry znaczącej przy jej wyrażaniu.

Pierwotnie metoda powstała jako technika obliczeniowa służąca do realizacji postulatu, dotyczącego wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru przy wzorcowaniu, wyrażonego w dokumencie [2]. Postulat ten mówi o konieczności wyznaczania współczynnika rozszerzenia dla poziomu ufności 95 % na podstawie rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa estymaty wielkości wyjściowej. Przy czym przez rzeczywisty można rozumieć rozkład powstały w wyniku złożenia rozkładów przypisanych poszczególnym wielkościom wejściowym. Matematyczne modele pomiaru stosowane przy wzorcowaniu to równania liniowe lub linearyzowane, gdzie wielkości wejściowe traktowane są na ogół jako zmienne losowe niezależne. Stwarza to warunki do zastosowania operacji splotu matematycznego do wyznaczania rzeczywistego rozkładu dla wielkości wyjściowej i obliczania współczynnika rozszerzenia, jako kwantyla tego rozkładu dla określonego prawdopodobieństwa rozszerzenia. Rozwiązanie to szczególnie przydatne jest przy podawaniu powyższego współczynnika w świadectwach wzorcowania. Ponieważ zagadnienie to dotyczyło głównie pomiarów związanych zapewnieniem spójności pomiarowej, to metoda została pierwotnie opublikowana w biuletynie międzynarodowej organizacji metrologii prawnej (OIML) [8]. Następnie przedstawiono ją w czasopiśmie naukowym międzynarodowej organizacji metrologii naukowej (IMEKO) [9]. W tym czasie toczyła się międzynarodowa dyskusja dotycząca wyrażania niepewności pomiaru w postaci przedziału rozszerzenia, wyznaczanego metodą propagacji rozkładów wielkości wejściowych na podstawie modelu matematycznego dla wielkości wyjściowej. Dyskusja toczyła się głównie w kręgach metrologicznych związanych z organizacjami skupionymi wokół Międzynarodowego Biura Miar (BIPM).

Wraz z przyjęciem nowych rozwiązań w tej dziedzinie została zaproponowana analityczna metoda obliczenia przedziału rozszerzenia i opublikowana w czasopiśmie firmowanym przez BIPM [10]. Ponieważ opiera się na składaniu standardowych rozkładów prawdopodobieństwa, szczególnie nadaje się dla opracowania wyniku pomiaru bezpośredniego, dla którego stosuje się model matematyczny w postaci liniowego równania pomiaru. Metoda doczekała się też praktycznej reali-

zacji. Zastosowano ją do analizy wyniku pomiaru uzyskanego przy użyciu laserowego przyrządu skanującego, stosowanego do bezstykowego pomiaru małych średnic zewnętrznych [11, 12].

Literatura

- [1] *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* ISO/IEC Guide 98-3/Suppl. 1:2008. BIPM JCGM 101:2008. Guide OIML G 1-101, Edition 2008 (E).
- [2] *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration.* European co-operation for Accreditation. Publication Reference EA-4/02, 1999.
- [3] C. F. Dietrich: *Uncertainty, Calibration and Probability.* The Statistics of Scientific and Industrial Measurement. Second Edition 1991.
- [4] P. Fotowicz: *Obliczanie niepewności rozszerzonej metodą analityczną opartą na splocie rozkładów wielkości wejściowych.* PAR nr 1 (2005), s. 5-9.
- [5] P. Fotowicz: *Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru.* PAR nr 10 (2003), s. 13-16.
- [6] P. Fotowicz: *Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o spłot rozkładu prostokątnego z normalnym.* PAK nr 4 (2004), s. 13-16.
- [7] P. Fotowicz: *Zasada przybliżenia rozkładu wyniku pomiaru przy wzorcowaniu.* PAR nr 9 (2001), s. 8-11.
- [8] P. Fotowicz: *Method for calculating the coverage factor in calibration.* OIML Bulletin, vol. XLIII (2002), s. 5-9.
- [9] P. Fotowicz: *A method of approximation of the coverage factor in calibration.* Measurement, vol. 35 (2004), s. 251-256.
- [10] P. Fotowicz: *An analytical method for calculating a coverage interval.* Metrologia, vol. 43 (2006), s. 42-45.
- [11] P. Fotowicz: *Practical application of an analytical method for calculating a coverage interval.* Measurement Science and Technology vol. 21 (2010) 087001 (7s.).
- [12] P. Fotowicz, R. Jabłoński: *Zastosowanie analitycznej metody obliczania przedziału rozszerzenia do oceny niepewności pomiaru małych średnic zewnętrznych laserowym przyrządem skanującym.* PAR nr 2 (2010), s. 5-11.